КТ

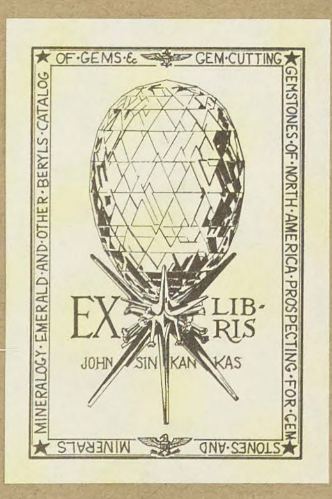
БИБЛИОТЕКА СОВРЕМЕННОГО ЗНАНИЯ

15

Д. Н. АРТЕМЬЕВ

КРИСТАЛЛОГРАФИЯ

ЗАКОНЫ КРИСТАЛЛИЗАЦИИ



ИЗДАТЕЛЬСТВО И. П. ЛАДЫЖНИКОВА БЕРЛИН

БИБЛИОТЕКА СОВРЕМЕННОГО ЗНАНИЯ

1. КОВАЛЕВСКИЙ. Введение в исчисление бесконечно малых.
2. БЛАУ. Автомобиль.
3. ЦАНДЕР. Нервная система.
4/5. РЮСБЕРГ. Введение в аналитическую химию. В двух частях.
6. БУКИ. Лучи Рентгена.
7. БАЙШ. Гигиена женщины.
8. ЛИНДОВ. Дифференциальное исчисление.
9. ГАССЕРТ. История полярных путешествий.
10. РОЗИН. Сердце, кровеносные сосуды, кровь и их заболевания.
11. ФАТЕР. Термодинамика.
12/15. АРТЕМЬЕВ. Кристаллография. В четырех част.
16. ИЛЬБЕРГ. Душевные болезни.
17. РИХТЕР. Введение в философию.
18/19. ОППЕНГЕЙМ. Астрономическое мировоззрение в его историческом развитии. В двух частях.
20. ФАТЕР. Практическая термодинамика.
21. АНИЧКОВ. Современная русская поэзия.
22. ТРЕМНЕР. Гипнотизм и внушение.
23. БРИК. Провода и кабели.
24. БЛОХМАН. Введение в экспериментальную химию.
25. ШТЕЙНМАН. Ледниковый период и доисторический человек.
26. ТУРН. Беспроволочная телеграфия.
27. КРАНЦ. Сферическая тригонометрия.
28/29. ФАТЕР. Новейшие тепловые двигатели. В двух частях.
30. ГЕССЕ. Учение о происхождении видов и дарвинизм.
31. КОН. Руководящие мыслители.
32/37. БАРДЕЛЕБЕН. Анатомия. В шести частях.
38. ГЕРБЕР. Человеческий голос и его гигиена.
39. АЛДАНОВ. Загадка Толстого.
40. КЕН. Электрическая передача энергии.

ИЗДАТЕЛЬСТВО И. П. ЛАДЫЖНИКОВА
БЕРЛИН W 50

БИБЛИОТЕКА СОВРЕМЕННОГО ЗНАНИЯ

15

Д. Н. АРТЕМЬЕВ

ПРОФ. МОСКОВСК. ГОС. УНИВ.

КРИСТАЛЛОГРАФИЯ

ТОМ ЧЕТВЕРТЫЙ

ЗАКОНЫ КРИСТАЛЛИЗАЦИИ

1 9 2 3

ИЗДАТЕЛЬСТВО И. П. ЛАДЫЖНИКОВА БЕРЛИН

Лейпциг, Типография Б. Г. Тейбнера.

VII. ЗАКОНЫ КРИСТАЛЛИЗАЦИИ.

1. УСТАНОВКА КРИСТАЛЛА.

Как мы видели выше, для определения символов всех граней и ребер данного реального кристаллического многогранника необходимо выбрать три или четыре возможных ребра, т. е. ряда пространственной решетки, лежащей в основе строения данного кристаллического вещества, и принять эти ряды за кристаллографические оси. Мы можем принять за кристаллографические оси сопряженные или несопряженные ряды. Если мы возьмем три сопряженных ряда, то, построив на них элементарные параллелепипеды, выведем все точки пространственной решетки, как вершины этих параллелепипедов. Если возьмем несопряженные ряды, то, при помощи построения на этих рядах элементарных параллелепипедов, мы уже не выведем всех точек пространственной решетки, так как только некоторая часть этих точек будет лежать в вершинах параллелепипедов, а остальные точки будут расположены на ребрах, гранях и внутри построенных параллелепипедов.

Если мы будем рассматривать данное ребро кристаллического комплекса, как вполне определенный ряд пространственной решетки, характеризующей данный комплекс, то, в случае принятия в качестве кристаллографических осей трех несопряженных рядов, мы можем и не вывести данного ряда. Совершенно другое получится, если мы будем рассматривать данное ребро, как один из рядов гомологических точек, имеющий определенное направление. При такой постановке вопроса мы не можем не вывести данного возможного ребра.

В самом деле, взяв две произвольные точки пространственной решетки и проведя через них ряд, мы можем про-

вести через каждую точку пространственной решетки ряд, параллельный данному.

Вся совокупность таких рядов пройдет через все точки пространственной решетки и, следовательно, в эту совокупность войдут все гомологические точки данной решетки. Таким образом, если бы, приняв за кристаллографические оси три несопряженных ряда, мы не получили бы ни одного из этих рядов, то мы, в сущности, не имели бы и пространственной решетки.

На основании этих рассуждений мы можем вывести такое заключение: все возможные грани и ребра кристаллического комплекса могут быть выведены: 1) если мы построим пространственную решетку на трех данных сопряженных рядах с определенными промежутками, а также 2) если мы построим решетку на трех несопряженных рядах.

Такие две решетки не будут одинаковы, так как об'емы их элементарных параллелепипедов будут различны, причем об'ем элементарного параллелепипеда решетки, построенного на трех сопряженных рядах в некоторое целое число раз будет меньше об'ема элементарного параллелепипеда решетки, построенного на трех несопряженных рядах.

Таким образом, определение возможных граней и ребер комплекса будет вполне одинаково, какие бы три или четыре возможных ребра мы ни приняли за кристаллографические оси, но определение истинного расположения точек в пространственной решетке, т. е. построение той решетки, которая действительно лежит в основе строения данного кристаллического вещества, возможно только в том случае, если за кристаллографические оси приняты три или четыре сопряженных ряда.

Таким образом, для правильного определения пространственной решетки данного кристаллического вещества чрезвычайно важно выбрать соответственные кристаллографические оси, за которые мы должны принять три возможные ребра данного комплекса, причем эти три ребра или должны быть тремя сопряженными рядами, или, если по каким-нибудь соображениям, нам удобнее принять за оси несопряженные ряды, то мы, в каждом таком случае, должны

всегда уметь построить истинную пространственную решетку.

Это возможно будет сделать, если только мы сможем определить положение всех тех гомологических точек, которые войдут в состав элементарного параллелепипеда построенной пространственной решетки.

Для пояснения только что сказанного рассмотрим пример двух кубических кристаллов различных структур.

Если у нас имеется кристалл гексаэдрической сингонии и структуры, то, приняв за кристаллографические оси ряды, перпендикулярные к граням куба, выведем пространственную решетку, которая будет представлять собою систему кубических элементарных параллелепипедов, причем все гомологические точки пространственной решетки будут находиться в вершинах таких параллелепипедов и ни одной точки не будет внутри или на грани элементарного параллелепипеда.

В этом случае, три выбранные кристаллографические оси будут сопряженными рядами данной решетки.

Если мы имеем кристалл гексаэдрической сингонии октаэдрической структуры, и за кристаллографические оси опять примем три ряда, перпендикулярные к граням куба, то эти ряды уже не будут сопряженными, так как гомологические точки пространственной решетки будут находиться не только в вершинах элементарных параллелепипедов, построенных на этих рядах, но и в их центрах. Если мы примем это во внимание и при построении пространственной решетки на таких трех рядах будем иметь в виду такие центральные гомологические точки, которые и поместим в соотвественном месте, то принятие за кристаллографические оси трех несопряженных рядов нисколько не помешает построению правильной пространственной решетки для данного кристалла.

Выбор тех или иных кристаллографических осей для данного кристаллического комплекса и определение отношения единичных отрезков по этим осям называется установкой кристалла.

Различают произвольную установку кристалла и правильную установку.

Произвольной установкой кристалла называется такая установка, на основании которой, вообще говоря, невозможно определить истинной пространственной решетки, характеризующей данный комплекс, причем, кроме того, такая установка противоречит тем правилам, которые вытекают из общих законов кристаллизации, о которых мы будем говорить дальше.

Если мы ограничимся только изучением внешней формы какого-нибудь кристалла, то из данных опыта и наблюдения, мы, вообще говоря, не сможем непосредственно определить пространственную решетку, лежащую в основе строения данного кристаллического вещества. Необходима предварительная обработка данных опыта и наблюдения, причем только в результате такой обработки возможно выяснение, с большей или меньшей степенью вероятности, схемы расположения гомологических точек пространственной решетки, характеризующей данный кристалл.

Изучая поверхность ограничения данного кристалла, мы можем измерить величины углов между гранями и ребрами данного кристаллического индивидуума, пользуясь определенными измерительными приборами, называемыми гониометрами.

На основании таких измерений мы можем с большей или меньшей точностью определить двугранные и плоские углы данного кристаллического многогранника и построить проекцию граней и ребер исследуемого кристалла.

Имея в руках такие данные, мы должны будем для определения кристаллического комплекса сделать установку кристалла.

Для определения кристаллического комплекса, т. е. для определения всех возможных граней и ребер данного кристаллического вещества совершенно безразлично будет ли сделанная установка правильной или неправильной. При всякой установке, данный кристаллический комплекс будет вполне определенным с точки зрения возможности построения какого угодно ребра и грани этого комплекса.

В виду этого, практически, для первоначальной ориентировки в тех данных, которые получаются после измерений, очень часто бывает выгодно сделать сначала совершенно

произвольную установку кристалла, а затем изменить ее на другую.

При таком изменении установки достаточно в общем случае переменить символы 4-х ребер данного комплекса, не лежащих по три в одной плоскости, причем символы всех граней и ребер также изменятся уже в зависимости от новых символов выбранных четырех ребер. Такая зависимость может быть вполне точно установлена на основании соображений, приведенных в следующем § 2.

2. ИЗМЕНЕНИЕ УСТАНОВКИ КРИСТАЛЛА.

Рассмотрим теперь вопрос об изменении установки кристалла.

На практике очень часто приходится делать такое изменение установки, которое выражается в том, что за кристаллографические оси оказывается необходимым принять другие ряды пространственной решетки, сравнительно с рядами, принятыми первоначально.

При такой перемене кристаллографических осей меняются символы всех или некоторых граней комплекса. В виду этого, необходимо установить определенную связь между символами граней и ребер комплекса при первоначальной и при измененной, новой, установке кристалла.

Таким образом, вопрос сводится к разрешению следующей проблемы: требуется изменить систему кристаллографических осей, приняв новые оси, и выразить эти новые оси в виде определенной функции осей, принятых первоначально, и наоборот.

Пусть $[t_1, t_2, t_3]$, $[t'_1, t'_2, t'_3]$, $[t''_1, t''_2, t''_3]$ — числовые координаты гомологических точек a_1, a_2 и a_3 (рис. 186), находящихся на новых кристаллографических осях 1) ox'_1, 2) ox'_2 и 3) ox'_3 и ближайших к началу o этих осей.

Обозначив промежутки рядов по ox'_1, ox'_2 и ox'_3 соответственно через c_1, c_2, c_3, находим: $oa_1 = c_1$, $oa_2 = c_2$, $oa_3 = c_3$.

Положим, r_1, r_2, r_3 — числовые координаты некоторой гомологической точки r в новой системе кристаллографических осей.

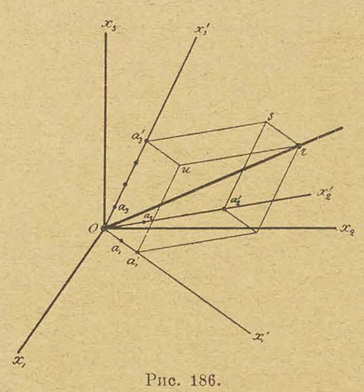


Рис. 186.

Пусть прежняя система кристаллографических осей образована рядами 1) ox_1 с промежутком c_1', 2) ox_2 с промежутком c_2' и 3) ox_3 с промежутком c_3' и точка r в прежней системе кристаллографических осей имеет символ $[r_1', r_2', r_3']$.

Построим на осях ox_1', ox_2' и ox_3' параллелепипед $oa_1'a_2'a_3'rsu$, приняв за непараллельные ребра этого параллелепипеда

$$ox_1'\cdot r_1 = oa_1';\quad ox_2'\cdot r_2 = oa_2' \quad \text{и} \quad ox_3'\cdot r_3 = oa_3'.$$

Так как точка a_1 в прежней системе имеет числовые координаты t_1, t_2, t_3, а точка a_1' имеет числовую координату по первой оси в новой системе r_1, то числовые координаты точки a_1', в прежней системе будут: по оси $ox_1 - t_1\cdot r_1$, по оси $ox_2 - t_2\cdot r_1$ и по оси $ox_3 - t_3\cdot r_1$.

Точно также найдем для точек a_2' и a_3' в прежней системе числовые координаты:

$$t_1'\cdot r_2,\ t_2'\cdot r_2,\ t_3'\cdot r_2 \quad \text{и} \quad t_1''\cdot r_3,\ t_2''\cdot r_3,\ t_3''\cdot r_3.$$

Чтобы получить числовые координаты r_1', r_2', r_3' точки r в прежней системе кристаллографических осей, мы должны будем по оси ox_1 пройти $t_1\cdot r_1 + t_1'\cdot r_2 + t_1''\cdot r_3$ промежутков c_1', по оси ox_2 — пройти $t_2 r_1 + t_2' r_2 + t_2'' r_3$ промежутков c_2', а по оси ox_3 — пройти $t_3\cdot r_1 + t_3'\cdot r_2 + t_3'' r_3$ промежутков c_3'.

Таким образом, находим:

$$r_1' = t_1 r_1 + t_1' r_2 + t_1'' r_3$$
$$r_2' = t_2 r_1 + t_2' r_2 + t_2'' r_3$$
$$r_3' = t_3 r_1 + t_3' r_2 + t_3'' r_3.$$

Представив:

$$\left.\begin{matrix} t_1 t_2' t_3'' - t_1 t_3' t_2'' + t_2 t_3' t_1'' - t_2 t_1' t_3'' \\ + t_3 t_1' t_2'' - t_3 t_2' t_1'' \end{matrix}\right\} = \begin{vmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ t_1' & t_2' & t_3' \\ t_1'' & t_2'' & t_3'' \end{vmatrix} = \triangle$$

Получаем из трех найденных уравнений:

$$\triangle \cdot r_1 = \begin{vmatrix} t'_2 & t'_3 \\ t''_2 & t''_3 \end{vmatrix} r'_1 + \begin{vmatrix} t'_3 & t'_1 \\ t''_3 & t''_1 \end{vmatrix} r'_2 + \begin{vmatrix} t'_1 & t'_2 \\ t''_1 & t''_2 \end{vmatrix} r'_3$$

$$\triangle \cdot r_2 = \begin{vmatrix} t_2 & t_3 \\ t''_2 & t''_3 \end{vmatrix} r'_1 + \begin{vmatrix} t_3 & t_1 \\ t''_3 & t''_1 \end{vmatrix} r'_2 + \begin{vmatrix} t_1 & t_2 \\ t''_1 & t''_2 \end{vmatrix} r'_3$$

$$\triangle \cdot r_3 = \begin{vmatrix} t_2 & t_3 \\ t'_2 & t'_3 \end{vmatrix} r'_1 + \begin{vmatrix} t_3 & t_1 \\ t'_3 & t'_1 \end{vmatrix} r'_2 + \begin{vmatrix} t_1 & t_2 \\ t'_1 & t'_2 \end{vmatrix} r'_3.$$

Для того, чтобы r_1, r_2 и r_3 были целыми числами, необходимо, как это ясно из только что выведенных уравнений, чтобы $\triangle = \pm 1$.

При таком допущении получаем:

$$\pm r_1 = \begin{vmatrix} t'_2 & t'_3 \\ t''_2 & t''_3 \end{vmatrix} r'_1 + \begin{vmatrix} t'_3 & t'_1 \\ t''_3 & t''_1 \end{vmatrix} r'_2 + \begin{vmatrix} t'_1 & t'_2 \\ t''_1 & t''_2 \end{vmatrix} r'_3$$

$$\pm r_2 = \begin{vmatrix} t_2 & t_3 \\ t'_2 & t''_3 \end{vmatrix} r'_1 + \begin{vmatrix} t_3 & t_1 \\ t''_3 & t''_1 \end{vmatrix} r'_2 + \begin{vmatrix} t_1 & t_2 \\ t'_1 & t''_2 \end{vmatrix} r'_3$$

$$\pm r_2 = \begin{vmatrix} t_2 & t_3 \\ t'_2 & t'_3 \end{vmatrix} r'_1 + \begin{vmatrix} t_3 & t_1 \\ t'_3 & t'_1 \end{vmatrix} r'_2 + \begin{vmatrix} t_1 & t_2 \\ t'_1 & t'_2 \end{vmatrix} r'_3.$$

При помощи соответствующего вращения системы осей ox'_1, ox'_2, ox'_3 вокруг точки o приведем ox'_1 к совпадению с осью ox_1 и ox'_2 к совмещению с плоскостью $x_1 o x_2$, принимая во внимание, чтобы ox_2 и ox'_2 были расположены по одну и ту же сторону от прямой ox_1, продолженной до бесконечности в двух направлениях; тогда, если ox_3 и ox'_3 будут расположены по одну и ту же сторону от плоскости $x_1 o x_2$, необходимо приписать числовым координатам r_1, r_2, r_3 знак $+$; в обратном случае необходимо взять для этих же величин знак $-$.

Если в общем уравнении плоскости $p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 = k$ примем $x_1 = r'_1$, $x_2 = r'_2$, $x_3 = r'_3$ и подставим вместо r'_1, r'_2 и r'_3 их значения из найденных уравнений, то получаем:

$$(p_1 t_1 + p_2 t_2 + p_3 t_3) r_1 + (p_1 t'_1 + p_2 t'_2 + p_3 t'_3) r_2 \\ + (p_1 t''_1 + p_2 t''_2 + p_3 t''_3) r_3 = k.$$

Из двух последних уравнений заключаем, что символ грани $(p_1 p_2 p_3)$ в прежней системе кристаллографических осей изменяется при новой системе в символ:

$$(p_1 t_1 + p_2 t_2 + p_3 t_3,\ p_1 t_1' + p_2 t_2' + p_3 t_3',\ p_1 t_1'' + p_2 t_2'' + p_3 t_3'').$$

Таким образом, обозначив символ той же грани в новой системе кристаллографических осей через $(q_1 q_2 q_3)$, получаем:

$$q_1 = p_1 t_1 + p_2 t_2 + p_3 t_3$$
$$q_2 = p_1 t_1' + p_2 t_2' + p_3 t_3'$$
$$q_3 = p_1 t_1'' + p_2 t_2'' + p_3 t_3''.$$

Взяв отношение этих трех уравнений, представим его в виде:

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{a_{11} p_1 + a_{12} p_2 + a_{13} p_3}{a_{21} p_1 + a_{22} p_2 + a_{23} p_3} \qquad \frac{q_2}{q_3} = \frac{a_{21} p_1 + a_{22} p_2 + a_{23} p_3}{a_{31} p_1 + a_{32} p_2 + a_{33} p_3} \qquad (1)$$

Из уравнения (1) видим, что для получения нового символа $(q_1 q_2 q_3)$ надо найти численные значения девяти коэффициентов a_{11}, a_{12}, $a_{13} \ldots a_{33}$. Так как нам нужно вычислить только отношения этих коеффициентов, а каждое выражение вида (1) дает 2 уравнения 1-ой степени, то для нахождения всех девяти коеффициентов достаточно 4-х таких выражений. Для составления этих выражений проще всего воспользоваться уравнениями для основных граней (100), (010), (001) и еще какой-нибудь из косых граней $(p_1 p_2 p_3)$, где p_1, p_2 и $p_3 > 0$.

Заметим, прежде всего, что все коэффициенты a_{11}, $a_{12} \ldots a_{33}$ должны быть целыми числами. В самом деле, как мы знаем, символ $(q_1 q_2 q_3)$ должен быть составлен из целых чисел. Так как p_1, p_2 и p_3 тоже целые и при том самые разнообразные числа, то и коэффициенты a_{11}, $a_{12} \ldots a_{33}$ должны быть целыми числами, иначе мы не получили бы целых значений для индексов всех символов граней.

Пусть грани, имеющие при первоначальной установке символы (100), (010), (001) и (111) примут при перемене координат соответственно символы $(d_1 d_2 d_3)$, $(e_1 e_2 e_3)$, $(f_1 f_2 f_3)$ и $(g_1 g_2 g_3)$. В таком случае, по уравнению (1) мы находим для грани (100):

$$d_1 : d_2 : d_3 = a_{11} : a_{21} : a_{31},$$

откуда можем заключить, что

$$d_1 = h \cdot a_{11},\ d_2 = h \cdot a_{21} \text{ и } d_3 = h \cdot a_{31}.$$

Для грани (010):

$$e_1 : e_2 : e_3 = a_{12} : a_{22} : a_{32},$$

откуда $e_1 = ka_{12},\ e_2 = k \cdot a_{22},\ e_3 = k \cdot a_{32}.$

Для грани (001):

$$f_1 : f_2 : f_3 = a_{31} : a_{32} : a_{33},$$

откуда $f_1 = l \cdot a_{31},\ f_2 = l \cdot a_{32},\ f_3 = l \cdot a_{33}.$

В этих формулах h, k и l — коэффициенты пропорциональности.

Для грани (111) получаем:

$$\frac{g_1}{g_2} = \frac{ha_{11} + ka_{12} + la_{13}}{ha_{21} + ka_{22} + la_{23}} \qquad \frac{g_2}{g_3} = \frac{ha_{21} + ka_{22} + la_{23}}{ha_{31} + ka_{32} + la_{33}} \tag{2}$$

В этом уравнении (2) неизвестными являются величины h, k и l, которые определяются при помощи детерминантов:

$$h = \begin{vmatrix} g_1 & a_{12} & a_{13} \\ g_2 & a_{22} & a_{23} \\ g_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};\quad k = \begin{vmatrix} a_{11} & g_1 & a_{13} \\ a_{21} & g_2 & a_{23} \\ a_{31} & g_3 & a_{33} \end{vmatrix};\quad l = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & g_1 \\ a_{21} & a_{22} & g_2 \\ a_{31} & a_{32} & g_3 \end{vmatrix} \tag{3}$$

Так как величины a_{11}, a_{12}, a_{13}, $a_{21} \ldots a_{33}$ остаются постоянными при определении символа какой угодно грани данного комплекса, то для грани $(p_1 p_2 p_3)$ мы можем составить следующие уравнения:

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{ha_{11}p_1 + ka_{12}p_2 + la_{13}p_3}{ha_{21}p_1 + ka_{22}p_2 + la_{23}p_3} \qquad \frac{q_2}{q_3} = \frac{ha_{21}p_1 + ka_{22}p_2 + la_{23}p_3}{ha_{31}p_1 + ka_{32}p_2 + la_{33}p_3} \tag{4}$$

Уравнение (4) представляет связь между символом $(p_1 p_2 p_3)$ данной грани в прежней установке и символом $(q_1 q_2 q_3)$ той же грани в новой установке. Эту связь можно представить в виде детерминанта:

$$\begin{vmatrix} ha_{11} & ka_{12} & la_{13} \\ ha_{21} & ka_{22} & la_{23} \\ ha_{31} & ka_{32} & la_{33} \end{vmatrix} \tag{5}$$

Этот детерминант (5) называется детерминантом преобразования символов или детерминантом перехода от первоначальной установки к новой.

Для иллюстрации вышеизложенного рассмотрим следующий пример.

Положим, грани (100) прежняго обозначения соответствует грань ($1\bar{1}0$) нового обозначения. Из общего выражения (1) получаем:

$$\frac{1}{\bar{1}} = \frac{a_{11} \cdot 1 + a_{12} \cdot 0 + a_{13} \cdot 0}{a_{21} \cdot 1 + a_{22} \cdot 0 + a_{23} \cdot 0} \qquad \frac{\bar{1}}{0} = \frac{a_{21} \cdot 1 + a_{22} \cdot 0 + a_{23} \cdot 0}{a_{31} \cdot 1 + a_{32} \cdot 0 + a_{33} \cdot 0} \quad \text{или} \quad \frac{1}{\bar{1}} = \frac{a_{11}}{a_{21}} \qquad \frac{\bar{1}}{0} = \frac{a_{21}}{a_{31}}$$

Но так как a_{11}, a_{21} и a_{31} могут иметь общий множитель h, то найденное уравнение примет вид:

$$\frac{h \cdot 1}{h \cdot \bar{1}} = \frac{a_{11}}{a_{21}} \qquad \frac{h \cdot \bar{1}}{h \cdot 0} = \frac{a_{21}}{a_{31}}$$

Если граням (010) и (001) прежнего обозначения соответствуют при новой установке грани (001) и (110), то для них получим аналогично следующие соотношения:

$$\frac{k \cdot 0}{k \cdot 0} = \frac{a_{12}}{a_{22}} \qquad \frac{k \cdot 0}{k \cdot 1} = \frac{a_{22}}{a_{32}} \quad \text{и} \quad \frac{l \cdot 1}{l \cdot 1} = \frac{a_{13}}{a_{23}} \qquad \frac{l \cdot 1}{l \cdot 0} = \frac{a_{23}}{a_{33}}.$$

Из всех этих трех выражений составляем детерминант:

$$\begin{vmatrix} h \cdot 1 & k \cdot 0 & l \cdot 1 \\ h \cdot \bar{1} & k \cdot 0 & l \cdot 1 \\ h \cdot 0 & k \cdot 1 & l \cdot 0 \end{vmatrix} \tag{6}$$

где сумма членов 1-ой горизонтали даст $a_{11} + a_{12} + a_{13}$, второй горизонтали: $a_{21} + a_{22} + a_{23}$ и, наконец, третьей горизонтали: $a_{31} + a_{32} + a_{33}$.

Допустим, что грани (111) старого обозначения соответствует грань (312) нового обозначения. В таком случае получаем для ее преобразования выражение:

$$\frac{3}{1} = \frac{1 \cdot a_{11} + 1 \cdot a_{12} + 1 \cdot a_{13}}{1 \cdot a_{21} + 1 \cdot a_{22} + 1 \cdot a_{23}} \qquad \frac{1}{2} = \frac{1 \cdot a_{21} + 1 \cdot a_{22} + 1 \cdot a_{23}}{1 \cdot a_{31} + 1 \cdot a_{32} + 1 \cdot a_{33}} \tag{7}$$

Сопоставив детерминант (6) и выражение (7), найдем:

$$a_{11} + a_{12} + a_{13} = 1 \cdot h + k \cdot 0 + l \cdot 1 = 3;$$
$$a_{21} + a_{22} + a_{23} = h \cdot 1 + k \cdot 0 + l \cdot 1 = 1;$$
$$a_{31} + a_{32} + a_{33} = h \cdot 0 + k \cdot 1 + l \cdot 0 = 2.$$

Решая эти уравнения относительно h, k и l, найдем $h = 1$, $k = 2$ и $l = 2$. Вставив найденные величины в детерминант (6), получим

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ \bar{1} & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

Это и есть детерминант преобразования для символов граней.

Теперь у нас определены все коэффициенты a_{11}, a_{12}, $a_{13} \ldots a_{33}$. Для нахождения нового символа какой угодно грани по ее старому символу при помощи детерминанта преобразования поступаем таким образом: первый индекс старого символа множим на первый член 1-ой горизонтали, второй индекс на второй член той же горизонтали, а третий — на третий член. Полученные произведения складываем и получаем таким образом 1-й индекс нового символа. Аналогично составленная сумма произведений второй горизонтали даст 2-й индекс символа, а из третьей горизонтали точно так же получится 3-й индекс символа.

Теперь, составив детерминант преобразования для перехода от старых символов к новым, мы так же просто можем составить из него и обратный детерминант, служащий для перехода от новых символов к старым. Для этого нужно только решить найденный детерминант, так как теперь у нас искомыми являются не коэффициенты уравнений, а индексы старых символов граней. Для решения детерминанта разлагаем его по горизонталям и получаем соответственные субдетерминанты. Каждый такой субдетерминант даст соответственный член обратного детерминанта.

Таким образом, взяв полученный нами детерминант преобразования

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ \bar{1} & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

и разложив его на субдетерминанты, находим:

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ & \diagdown & \diagdown & \diagdown & \\ \bar{1} & 0 & 2 & \bar{1} & 0 \\ & \times & \times & \times & \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \end{matrix} \quad \underbrace{1\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}}_{\bar{4}} + \underbrace{0\begin{vmatrix} 2 & \bar{1} \\ 0 & 0 \end{vmatrix}}_{0} + \underbrace{2\begin{vmatrix} \bar{1} & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}}_{\bar{4}} \quad \left.\begin{matrix} \bar{4} \\ 0 \\ \bar{4} \end{matrix}\right\}$$

Первый столбец обратного детерминанта.

$$\begin{matrix} \bar{1} & 0 & 2 & \bar{1} & 0 \\ & \diagdown & \diagdown & \diagdown & \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ & \times & \times & \times & \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{matrix} \quad \underbrace{1\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}}_{\bar{4}} + \underbrace{0\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}_{0} + \underbrace{2\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}_{\bar{4}} \quad \left.\begin{matrix} \bar{4} \\ 0 \\ \bar{4} \end{matrix}\right\}$$

Второй столбец обратного детерминанта.

$$\begin{matrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ & \diagdown & \diagdown & \diagdown & \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ & \times & \times & \times & \\ \bar{1} & 0 & 2 & \bar{1} & 0 \end{matrix} \quad \underbrace{0\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}}_{0} + \underbrace{2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & \bar{1} \end{vmatrix}}_{\bar{8}} + \underbrace{0\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \bar{1} & 0 \end{vmatrix}}_{0} \quad \left.\begin{matrix} 0 \\ \bar{8} \\ 0 \end{matrix}\right\}$$

Третий столбец обратного детерминанта.

Получаем детерминант:

$$\begin{vmatrix} \bar{4} & \bar{4} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{8} \\ \bar{4} & 4 & 0 \end{vmatrix}.$$

Сократив этот детерминант на $\bar{4}$, получаем:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & \bar{1} & 0 \end{vmatrix}.$$

Это и есть обратный детерминант преобразования, служащий для перехода от новых символов к старым.

Очень часто бывает удобнее делать переход от старых символов к новым, пользуясь только что изложенным способом.

Если мы знаем, чему соответствуют в старом обозначении грани, имеющие при новом обозначении символы (100), (010), (001) и (111), то, составив сначала детерминант для перехода от новых символов к старым, вычисляем обратный детерминант преобразования и получаем, таким образом, де-

терминант перехода от старых символов к новому обозначению.

Для составления такого же детерминанта преобразования для перехода от комплекса кубического к комплексу гипогексагонального типа с символами, имеющими четыре индекса, совершенно достаточно составить по тому же способу детерминант, принимая во внимание только индекс символа, соответствующий отрезку по особой вертикальной оси x_0 и какие угодно два из трех других. 4-й индекс символа получится прямо из двух индексов, не относящихся к особой оси. В самом деле, обозначим индекс символа некоторой грани гипогексагонального комплекса, соответствующий особой оси, через p_0 а три других p_1, p_2 и p_3. Тогда, как известно, мы получим следующие соотношения: $p_1 = p_2 - p_3$; $p_2 = p_1 + p_3$ и $p_3 = p_2 - p_1$. На основании этих уравнений всегда можем найти один из трех индексов символа p_1, p_2 и p_3, зная два остальных.

Положим, грани, имеющие при первоначальной установке кристалла символы (100), (010), (001) и (111) получают, при новой установке, символы $(a_1 a_2 a_3)$, $(b_1 b_2 b_3)$ и $(c_1 c_2 c_3)$. В таком случае, детерминант преобразования, как мы знаем, должен быть:

$$\begin{vmatrix} a_1 h & b_1 k & c_1 l \\ a_2 h & b_2 k & c_2 l \\ a_3 h & b_3 k & c_3 l \end{vmatrix} = \triangle_1$$

В этом детерминанте величины h, k и l определяются по соответственным детерминантам, а именно:

$$h = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$k = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$l = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

Обозначив:

$$a_1 h = m_1;\quad a_2 h = m_2;\quad a_3 h = m_3;$$
$$b_1 k = n_1;\quad b_2 k = n_2;\quad b_3 k = n_3;$$
$$c_1 l = p_1;\quad c_2 l = p_2;\quad c_3 l = p_3;$$

и подставив эти величины $m_1 \ldots n_1 \ldots p_1 \ldots$ вместо равных им величин в детерминант $\triangle_1$, получаем:

$$\triangle_1 = \begin{vmatrix} m_1 n_1 p_1 \\ m_2 n_2 p_2 \\ m_3 n_3 p_3 \end{vmatrix}$$

Допустим теперь, что после преобразования всех символов по детерминанту $\triangle_1$ требуется сделать преобразование вновь полученных символов по детерминанту $\triangle_2$, причем

$$\triangle_2 = \begin{vmatrix} m'_1 n'_1 p'_1 \\ m'_2 n'_2 p'_2 \\ m'_3 n'_3 p'_3 \end{vmatrix}$$

Таким образом, мы имеем два преобразования первоначально данных символов: сначала первоначально данные символы преобразуются по детерминанту $\triangle_1$, а затем преобразованные по этому детерминанту символы вновь преобразуются по детерминанту $\triangle_2$.

Первоначальному символу (100) после первого преобразования будет соответствовать символ $(m_1 m_2 m_3)$, а после второго — символ:

$$(m_1 m'_1 + m_2 n'_1 + m_3 p'_1,\ m_1 m'_2 + m_2 n'_2 + m_3 p'_2,\ m_1 m'_3 + m_2 n'_3 + m_3 p'_3).$$

Первоначальный символ (010) после первого преобразования превращается в символ $(n_1 n_2 n_3)$, а после второго — в символ:

$$(n_1 m'_1 + n_2 n'_1 + n_3 p'_1,\ n_1 m'_2 + n_2 n'_2 + n_3 p'_2,\ n_1 m'_3 + n_2 n'_3 + n_3 p'_3).$$

Первоначальный символ (001) после первого преобразования переходит в символ $(p_1 p_2 p_3)$, а после второго — в символ:

$$(p_1 m'_1 + p_2 n'_1 + p_3 p'_1,\ p_1 m'_2 + p_2 n'_2 + p_3 p'_2,\ p_1 m'_3 + p_2 n'_3 + p_3 p'_3).$$

Составив детерминант из тех символов, которые получаются после второго преобразования вместо первоначальных (100), (010) и (001), получаем детерминант перехода от первоначальных символов прямо к символам, получающимся после второго преобразования.

Этот детерминант будет:

$$\begin{vmatrix} m_1 m_1' + m_2 n_1' + m_3 p_1' & n_1 m_1' + n_2 n_1' + n_3 p_1' & p_1 m_1' + p_2 n_1' + p_3 p_1' \\ m_1 m_2' + m_2 n_2' + m_3 p_2' & n_1 m_2' + n_2 n_2' + n_3 p_2' & p_1 m_2' + p_2 n_2' + p_3 p_2' \\ m_1 m_3' + m_2 n_3' + m_3 p_3' & n_1 m_3' + n_2 n_3' + n_3 p_3' & p_1 m_3' + p_2 n_3' + p_3 p_3' \end{vmatrix}$$

$$= \triangle_3 = \begin{vmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} m_1' & m_2' & m_3' \\ n_1' & n_2' & n_3' \\ p_1' & p_2' & p_3' \end{vmatrix}$$

Таким образом, $\triangle_3$ будет произведением двух детерминантов преобразования $\triangle_1 \cdot \triangle_2$, причем в первом из детерминантов $\triangle_1$ строки заменяются колоннами, а колонны строками.

Правильность такого получения детерминанта $\triangle_3$ легко проверить, заметив, что, вместо первоначального символа (111), после первого преобразования мы получим символ:

$$(m_1 + n_1 + p_1 \quad m_2 + n_2 + p_2 \quad m_3 + n_3 + p_3),$$

а после второго преобразования найдем символ:

$$m_1'(m_1 + n_1 + p_1) + n_1'(m_2 + n_2 + p_2) + p_1'(m_3 + n_3 + p_3);$$
$$m_2'(m_1 + n_1 + p_1) + n_2'(m_2 + n_2 + p_2) + p_2'(m_3 + n_3 + p_3);$$
$$m_3'(m_1 + n_1 + p_1) + n_3'(m_2 + n_2 + p_2) + p_3'(m_3 + n_3 + p_3).$$

Именно такой символ и получится, если мы умножим каждый член каждой строки детерминанта $\triangle_3$ на единицу и сложим эти произведения по строкам.

На основании только что изложенного способа получения детерминанта для двойного преобразования символов, мы можем легко найти детерминант преобразования, если даны первоначальные и преобразованные символы каких угодно четырех граней комплекса, не пересекающихся в параллельных ребрах.

Для нахождения такого детерминанта $\triangle_{\mathrm{I}}^{\mathrm{II}}$, мы можем воспользоваться следующим рассуждением.

Положим, мы имеем гномостереографическую проекцию данного комплекса. Пусть проекции четырех данных граней с первоначальными символами: $(a_1 a_2 a_3)$, $(b_1 b_2 b_3)$, $(c_1 c_2 c_3)$ и $(d_1 d_2 d_3)$ расположены так, что грань $(d_1 d_2 d_3)$ находится внутри сферического треугольника, вершинами которого служат грани $(a_1 a_2 a_3)$, $(b_1 b_2 b_3)$ и $(c_1 c_2 c_3)$.

Положим, грани $(a_1 a_2 a_3)$, $(b_1 b_2 b_3)$, $(c_1 c_2 c_3)$ и $(d_1 d_2 d_3)$ должны иметь после преобразования, соответственно, символы $(a_1' a_2' a_3')$, $(b_1' b_2' b_3')$, $(c_1' c_2' c_3')$ и $(d_1' d_2' d_3')$.

Придадим грани $(a_1 a_2 a_3)$ — символ (100), грани $(b_1 b_2 b_3)$ — символ (010), грани $(c_1 c_2 c_3)$ — символ (001) и грани $(d_1 d_2 d_3)$ — символ (111.)

В конечном результате мы имеем три установки:

I установка (первоначальная)	установка *A* (вспомогательная)	II установка (после преобразования)
$(a_1 a_2 a_3)$	(100)	$(a_1' a_2' a_3')$
$(b_1 b_2 b_3)$	(010)	$(b_1' b_2' b_3')$
$(c_1 c_2 c_3)$	(001)	$(c_1' c_2' c_3')$
$(d_1 d_2 d_3)$	(111)	$(d_1' d_2' d_3')$

Положим $\triangle_A^I$ — детерминант перехода от установки *A* к установке I

$$\triangle_A^I = \begin{vmatrix} m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \\ m_3 & n_3 & p_3 \end{vmatrix}$$

В таком случае детерминант $\triangle_I^A$ обратного перехода от установки I к установке *A* будет;

$$\triangle_I^A = \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} n_2 p_2 \\ n_3 p_3 \end{vmatrix} = m_1' & \begin{vmatrix} n_3 p_3 \\ n_1 p_1 \end{vmatrix} = n_1' & \begin{vmatrix} n_1 p_1 \\ n_2 p_2 \end{vmatrix} = p_1' \\ \begin{vmatrix} p_2 m_2 \\ p_3 m_3 \end{vmatrix} = m_2' & \begin{vmatrix} p_3 m_3 \\ p_1 m_1 \end{vmatrix} = n_2' & \begin{vmatrix} p_1 m_1 \\ p_2 m_2 \end{vmatrix} = p_2' \\ \begin{vmatrix} m_2 n_2 \\ m_3 n_3 \end{vmatrix} = m_3' & \begin{vmatrix} m_3 n_3 \\ m_1 n_1 \end{vmatrix} = n_3' & \begin{vmatrix} m_1 n_1 \\ m_2 n_2 \end{vmatrix} = p_3' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m_1' & n_1' & p_1' \\ m_2' & n_2' & p_2' \\ m_3' & n_3' & p_3' \end{vmatrix}$$

Пусть $\triangle_A^{II}$ — детерминант перехода от установки A к установке II, причем:

$$\triangle_A^{II} = \begin{vmatrix} q_1 r_1 s_1 \\ q_2 r_2 s_2 \\ q_3 r_3 s_3 \end{vmatrix}$$

Для получения искомого детерминанта преобразования $\triangle_I^{II}$ заменяем в детерминанте $\triangle_I^{A}$ колонны строками и умножаем такой измененный детерминант на $\triangle_A^{II}$.

Получаем:

$$\begin{vmatrix} m'_1 m'_2 m'_3 \\ n'_1\; n'_2\; n'_3 \\ p'_1\; p'_2\; p'_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} q_1 r_1 s_1 \\ q_2 r_2 s_2 \\ q_3 r_3 s_3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} m'_1 q_1 + m'_2 r_1 + m'_3 s_1 & n'_1 q_1 + n'_2 r_1 + n'_3 s_1 & p'_1 q_1 + p'_2 r_1 + p'_3 s_1 \\ m'_1 q_2 + m'_2 r_2 + m'_3 s_2 & n'_1 q_2 + n'_2 r_2 + n'_3 s_2 & p'_1 q_2 + p'_2 r_2 + p'_3 s_2 \\ m'_1 q_3 + m'_2 r_3 + m'_3 s_3 & n'_1 q_3 + n'_2 r_3 + n'_3 s_3 & p'_1 q_3 + p'_2 r_3 + p'_3 s_3 \end{vmatrix}$$

Заменив в этом последнем детерминанте колонны строками, и наоборот, получаем искомый детерминант преобразования $\triangle_I^{II}$:

$$\triangle_I^{II} =$$

$$\begin{vmatrix} m'_1 q_1 + m'_2 r_1 + m'_3 s_1 & m'_1 q_2 + m'_2 r_2 + m'_3 s_2 & m'_1 q_3 + m'_2 r_3 + m'_3 s_3 \\ n'_1 q_1 + n'_2 r_1 + n'_3 s_1 & n'_1 q_2 + n'_2 r_2 + n'_3 s_2 & n'_1 q_3 + n'_2 r_3 + n'_3 s_3 \\ p'_1 q_1 + p'_2 r_1 + p'_3 s_1 & p'_1 q_2 + p'_2 r_2 + p'_3 s_2 & p'_1 q_3 + p'_2 r_3 + p'_3 s_3 \end{vmatrix}$$

При получении детерминантов преобразования необходимо иметь в виду, что все эти детерминанты представляют собою выражения отношений некоторых величин, представленные в виде отношения целых чисел. Вследствие этого, если все члены полученного детерминанта преобразования имеют общий делитель, то мы можем их сократить на этот делитель.

3. ЗАКОН КРИСТАЛЛИЗАЦИИ A. BRAVAIS.

Из вышеизложенной теории структуры кристаллического вещества с необходимостью вытекает возможность образования бесконечного количества граней кристаллического комплекса.

Если бы все возможные грани данного комплекса имели одинаковые шансы для появления в виде реальных граней данного кристалла, то вместо кристаллического многогранника, ограниченного сравнительно небольшим количеством плоских граней, мы наблюдали бы многогранник с бесконечным числом граней, т. е. получили бы в сущности не многогранник, а некоторую кривую поверхность т. е. шар, эллипсоид или подобную им форму.

Так как на самом деле, в природе, мы встречаем исключительно только кристаллические индивидуумы, ограниченные плоскими гранями и представляющие собою настоящие выпуклые многогранники, то для об'яснения такого факта нам необходимо допустить, что не все грани кристаллического комплекса имеют одинаковые шансы проявиться в качестве форм наружного ограничения кристалла.

Таким образом, вероятность появления той или другой возможной грани в виде наружной поверхности ограничения кристаллического многогранника, т. е. в виде реальной грани кристалла, будет различна для разных граней.

Первые попытки об'яснить различие в способности разных граней образоваться в виде поверхности ограничения кристаллического многогранника были сделаны Найу.

При выводе закона рациональности отношений параметров, Найу, на основании своего кристаллографического опыта сделал предположение, что отношения параметров граней, развитых на кристалле, будут не только рациональны, но кроме того, могут быть выражены обыкновенно очень небольшими числами.

Если мы будем рассматривать такое утверждение с точки зрения символов граней, развивающихся на кристаллическом многограннике, то увидим, что общий смысл такого положения заключается в том, что при образовании кристаллов на них развиваются грани, имеющие символы с индексами, выражающимися наиболее простыми числами.

Эта закономерность относится к таким, которые не могут быть непосредственно выведены из теории структуры кристаллов, но выясняются при сопоставлении данных фактического материала и его специальной обработки.

Это заключение Найу — простота индексов символа граней кристалла — не связана непосредственно с явлениями симметрии и с ретикулярной теорией строения кристаллического вещества.

Оно указывает на новые законности и выходит за пределы принятых нами во внимание положений. Найу не высказал это обобщение вполне точно. В своей работе он, до известной степени, шел ощупью, исходил из телеологических соображений — но уже материал, собранный им и в его время, с несомненностью доказывал правильность его обобщения. С тех пор, в течение более чем столетия, это обобщение Найу только подтверждалось и мы можем сказать в настоящее время, что для огромного большинства кристаллических многогранников, символы наблюдаемых граней имеют чрезвычайно простые индексы, обыкновенно не больше 2—3; редко они превышают 6.

К этому можно только добавить, что, сделав правильную установку кристаллов данного вещества, мы, при сравнительно не очень богатой комбинации, получаем такие индексы символов граней, которые выражаются почти исключительно цифрами 0, 1, 2; уже цифра 3 встречается довольно редко, а большие цифры представляют из себя прямо исключения.

Таким образом, та эмпирическая закономерность, которая была подмечена Найу, может быть названа законом наибольшей простоты символов граней форм, развивающихся на кристалле. Этот закон с чрезвычайной ясностью констатируется именно в том случае, когда мы имеем дело с кристаллами кубической сингонии, благодаря тому, что комплексы этих кристаллов являются a priori вполне определенными и совершенно не допускают возможности произвольного изменения установки кристалла. В самом деле, известно, что на кристаллах кубической сингонии, главным образом, можно сказать почти исключительно, развиваются грани наиболее простых символов.

Очень важно заметить, что этот эмпирический закон, извлеченный из громадного фактического материала, не может быть непосредственно связан с ретикулярной теорией структуры кристаллов. В самом деле, простота индексов символа

в основе своей остается для нас простым результатом наблюдения. Для того, чтобы связать закон наибольшей простоты символов с ретикулярной теорией структуры, необходимо сделать одно совершенно определенное допущение, которое вполне оправдывается на опыте.

Как мы знаем, каждая грань кристалла, с точки зрения ретикулярной теории строения кристаллического вещества будет представлять собою одну из плоских сеток данной пространственной решетки. В виду этого, может возникнуть предположение о том, не имеется ли связи между количеством материальных частиц, расположенных на единице площади данной плоской сетки и возможностью появления этой сетки в виде реальной грани кристалла. Количество гомологических точек, приходящееся на единицу площади данной грани, вообще, называется ретикулярной плотностью или плотностью сетки данной грани.

Если мы возьмем в данной плоской сетке два сопряженных ряда гомологических точек, то, как мы уже видели, эти два ряда определят систему параллелограммов, внутри которых не будет ни одной гомологической точки, так как все точки будут лежать в вершинах таких параллелограммов.

Количество гомологических точек, приходящееся на единицу площади данной плоской сетки, будет обратно пропорционально площади такого параллелограмма, причем площади параллелограммов, построенных на каких угодно двух сопряженных рядах данной плоской сетки будут всегда равны друг другу, а кроме того, они должны быть равны площади элементарного параллелограмма данной плоской сетки. Определив величину площади элементарного параллелограмма и разделив единицу на эту величину, мы получим плотность данной плоской сетки пространственной решетки. Принимая во внимание, что каждая плоская сетка будет возможной гранью кристаллического комплекса, мы можем назвать ту же величину, обратную площади элементарного параллелограмма, ретикулярной плотностью данной грани кристалла.

Вообще говоря, для различных граней одного и того же кристалла мы будем иметь различные плотности сеток, причем плотности сеток, связанных друг с другом каким-нибудь

элементом симметрии данного кристаллического комплекса, будут одинаковы.

Аналогично с плотностью сетки мы можем определить и плотность ребра кристалла, взяв величину, обратную длине промежутка ряда гомологических точек пространственной решетки, соответствующего данному ребру.

Допустим, что возможность появления и развития некоторой грани находится в прямой зависимости от ее ретикулярной плотности. Такое допущение действительно и сделал Bravais, который и установил связь между экспериментальным законом наибольшей простоты символов граней, развивающихся на кристалле форм, с одной стороны, и теорией структуры кристаллов — с другой. Благодаря такому допущению, закон наибольшей простоты символов, в конце концов, должен быть заменен наиболее правильным и общим законом наибольших плотностей сеток тех граней, которые развиваются на кристаллическом многограннике.

Главным побуждением для установления закона наибольших плотностей сеток граней, развитых на кристалле форм, послужила для Bravais та полная неопределенность закона наибольшей простоты символов кристаллических граней, которая бросается в глаза при более внимательном исследовании этого последняго закона. Вообще, можно сказать, что закон наибольшей простоты символов граней является вполне определенным исключительно в случае комплексов кубической сингонии, допускающих только одну единственную установку, причем, в этом случае, ретикулярная плотность грани не меняется от изменения порядка индексов ее символа.

В случае кристаллических комплексов, относящихся к другим сингониям, закон наибольшей простоты символов граней уже совершенно теряет всякую определенность. На такую неопределенность этого закона и вытекающие из нее затруднения указывает, между прочим, Mallard. «Если сравнить,» пишет этот автор, «например порядок физической важности форм с порядком простоты их символов, то очень скоро приходится остановиться при таком сравнении, благодаря трудности решить вопрос о том, что можно считать степенью простоты. Например, можно спросить, в случае кристалла

тетрагональной системы, который из символов будет наиболее простым (112), (211) или (121)»

Кроме затруднений подобных тем, на которые указывает Mallard, мы, применяя закон наибольшей простоты символов, встречаем ряд новых трудностей, связанных с полной неопределенностью тех принципов, на основании которых производилась раньше установка кристалла. В самом деле, до введения в кристаллографическую практику вполне определенных принципов правильной установки кристалла, такая установка, в особенности для кристаллов моноклинной и триклинной сингоний, была предоставлена на полный произвол автора. Так как символы граней находятся в непосредственной зависимости от установки кристалла, то вполне понятна та полная неопределенность, которая резко бросается в глаза при сопоставлении установок данных различными авторами для одного и того-же кристаллического комплекса.

«Чтобы устранить насколько возможно эту неопределенность», пишет Bravais в своих кристаллографических этюдах, изданных в 1851 г. «я буду пользоваться одной гипотезой, которая, правда, совершенно не имеет той степени точности, как те результаты, к которым мы пришли до сих пор; однако, эта гипотеза имеет то преимущество перед прежними методами, что она обладает теоретической основой. Эта гипотеза оставляет очень мало места для произвола исследователя и, наконец, допускает самые разнообразные проверки».

Первое предположение, которое делает Bravais для установления своей гипотезы, состоит в том, что плоскости спайности в общем являются такими, которые ограничивают наиболее толстые слои пространственной решетки. Те теоретические соображения, которые лежат в основе этого предположения, следующие: при изучении явления спайности мы имеем перед собой деление пространственной решетки, образующей данный кристалл, на две части по плоскости, параллельной одной из плоских сеток данной решетки. В этом случае мы должны различать две силы: с одной стороны силу, с которой молекулы одной и той же плоской сетки притягивают друг друга; это будет сила, называемая тангенциальным натяжением в плоскости или сопротивлением излому по линии,

проведенной в данной плоскости. С другой стороны, мы имеем силу, с которой молекулы данной плоскости притягивают ближайшие молекулы соседней плоскости. Это — та сила, которую можно назвать нормальным натяжением в плоскости или сопротивлением излому, параллельному этой плоскости. Так как известно, что, в общем, натяжение увеличивается настолько, насколько уменьшается среднее расстояние между молекулами, то, благодаря этому, можно думать, что при одинаковых общих условиях тангенциальное натяжение будет настолько больше, насколько более плотна плоская сетка, а нормальное натяжение будет настолько меньше, насколько будет больше расстояние между соседними плоскостями.

Если исследовать одну за другой различные системы ретикулярных плоскостей кристаллов, то увидим, что плотность сетки и расстояние между соседними слоями, для каждой из этих систем, являются двумя величинами, которые увеличиваются и уменьшаются вместе, оставаясь постоянно пропорционалными одна другой.

Итак, по мере того, как мы переходим от плоскостей с меньшей ретикулярной плотностью к плоскостям с большей ретикулярной плотностью, мы видим, что их тангенциальное натяжение увеличивается, а нормальное уменьшается.

Вследствие этого, натяжение в плоскостях спайности делается все более и более значительным, так как ему способствует тангенциальное натяжение, в то время как нормальное натяжение стремится ему воспрепятствовать. Таким образом, наиболее совершенная спайность должна быть параллельна плоскости с максимальной ретикулярной плотностью, и если кристалл обладает спайностью, параллельной двум или трем кристаллическим формам, то порядок совершенства этих спайностей должен находиться в прямом отношении с порядком плотностей сеток соответствующих граней.

Путем совершенно аналогичных рассуждений можно показать, что те плоскости, которые обладают наибольшей способностью появляться на кристалле при его выделении, выражаясь иначе, те плоские сетки, которые обладают наибольшей способностью ограничивать кристалл, являются, в об-

щем, такими, ретикулярная плотность которых будет наибольшей.

Причиной этого могут служить те внутренние движения, которые постоянно имеют место на поверхности кристаллической массы во время ее образования и играют, с известной точки зрения, роль внешних сил, которые должны быть приложены для раскалывания кристалла.

С этой точки зрения, добавляет Bravais, возможность появления и развития каждой рациональной грани кристалла должна быть, по крайней мере отчасти, пропорциональна плотности ее сетки. Однако, этот критерий менее достоверен, чем тот, который выводится из наблюдения над плоскостями спайности, в виду того, что образование естественных граней подчиняется во время кристаллизации множеству посторонных влияний, с трудом поддающихся анализу, которые могут способствовать образованию той или другой кристаллической формы, а кроме того действовать не одинаково на различные части кристалла.

Устанавливая свой закон наибольших плотностей сеток граней, развивающися на кристаллах при их образовании, Bravais все время подчеркивает, что такая закономерность имеет самое общее значение, т. е. оправдывается только в общем смысле, причем на опыте иногда могут быть наблюдаемы различные отступления, зависящие от действия, как внешних, так и внутренних факторов кристаллизации.

Однако, если в пространственной решетке какого-нибудь кристаллического комплекса имеется одна плоская сетка, обладающая исключительно большой плотностью, сравнительно с плотностями других сеток той же решетки, то такая особая плоская сетка будет всегда выступать на поверхности кристалла и служит одной из наиболее развитых плоскостей его ограничения. Если же мы имеем несколько граней различных форм, плотности сеток которых будут по величине мало отличаться между собой, хотя в то же время такие грани будут намного плотнее граней всех других форм, возможных для данного комплекса, то в таких случаях часто на кристалле развиваются не те грани, которые обладают наибольшими плотностями сеток, а грани с несколько меньши-

ми плотностями, хотя в общем смысле закон наибольших плотностей сеток граней вполне оправдывается на обширном кристаллографическом опыте.

В виду установленного Bravais закона наибольших плотностей сеток выясняется важность умения определять плотность сетки данной грани кристалла.

4. ПЛОТНОСТИ СЕТОК ГРАНЕЙ И РЕБЕР КОМПЛЕКСА.

Для определения абсолютной величины плотности сетки данной грани кристаллического комплекса может служить величина, обратная выражению (9) § 8 гл. VI для площади элементарного параллелограмма плоской сетки, соответствующей данной грани.

Таким образом, плотность сетки D грани символа $(p_1 p_2 p_3)$ будет:

$$D = \frac{1}{s_{(p_1 p_2 p_3)}} = \frac{1}{\sqrt{\begin{aligned} s^2_{(100)} p_1^2 + p_2^2 s^2_{(010)} + p_3^2 s^2_{(001)} \\ - 2p_1 s_{(100)} p_2 s_{(010)} \cos \varrho \\ - 2p_1 s_{(100)} p_3 s_{(001)} \cos \nu \\ - 2p_2 s_{(010)} p_3 s_{(001)} \cos \mu \end{aligned}}} \qquad (I)$$

Это выражение для плотности сетки данной грани будет правильным только в том случае, если мы примем за кристаллографические оси три сопряженных ряда данной пространственной решетки.

Очевидно, что какие бы три сопряженных ряда пространственной решетки мы не приняли за кристаллографические оси, мы всегда найдем одну и ту же плотность для плоской сетки данного положения, хотя эта сетка будет иметь другой символ при перемене кристаллографических осей.

Таким образом, выбор кристаллографических осей не может повлиять на определение плотности сетки данной грани, если только перемена осей будет ограничена непременным условием, чтобы за такие оси всякий раз принимались три сопряженных ряда пространственной решетки.

Совершенно другое получится, если за кристаллографические оси принять несопряженные ряды. В этом случае,

плотности сеток некоторых граней, вычисленные по приведенной фомуле, не будут уже соответствовать действительным их плотностям, так как при подсчете количества точек, приходящихся на единицу площади этих граней, будут пропущены те точки, которые не лежат в вершинах параллелепипедов, построенных на кристаллографических осях.

Таким образом, с точки зрения закона Bravais, правильная установка должна рассматриваться, как нахождение по данным опыта и наблюдения таких кристаллографических осей, которые будут представлять собою сопряженные ряды данной пространственной решетки.

Согласно закону Bravais вероятность развития той или другой грани зависит от того, насколько ее ретикулярная плотность будет больше или меньше ретикулярных плотностей других граней.

В виду этого, для суждения о вероятности появления данной грани в виде поверхности ограничения кристалла, важно знать не абсолютные величины плотностей сеток различных граней комплекса, а их относительные величины по сравнению с некоторой более или менее произвольно выбранной единицей площади.

Если нам дан кубически-изотропный комплекс гексаэдрической структуры, то ребра симметрической ячейки этого комплекса будут в то же время и ребрами его элементарного параллелепипеда, т. е. будут тремя сопряженными рядами пространственной решетки. В виду этого, мы легко можем определить плотность сетки какой угодно грани комплекса по ее символу, если примем:

$$s_{(100)} = s_{(010)} = s_{(001)} = 1.$$

В самом деле, принимая во внимание, что для кубически-изотропного комплекса $\varrho = \nu = \mu = 90^0$, из формулы (I) находим:

$$D = \frac{1}{s_{(p_1 p_2 p_3)}} = \frac{1}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}} \qquad \text{(II)}$$

Это выражение для плотности сетки данной грани кубически-изотропного комплекса будет иметь место только для комплекса гексаэдрической структуры. В самом деле, если

только мы условимся всегда принимать за кристаллографические оси ребра, перпендикулярные к граням куба, то только в случае гексаэдрической структуры эти ребра будут тремя сопряженными рядами пространственной решетки.

В случае октаэдрической или додекаэдрической структуры эти ребра уже не будут сопряженными рядами пространственной решетки, так как, построив на них куб, мы уже не получим элементарного параллелепипеда, а найдем симметрическую ячейку, содержащую при октаэдрической структуре гомологическую точку в центре ячейки, а в случае додекаэдрической структуры гомологические точки будут находиться еще и в центрах граней такой кубической симметрической ячейки.

Мы можем рассматривать пространственную решетку каждого кубически-изотропного комплекса октаэдрической структуры, как систему симметрических ячеек. Приняв за кристаллографические оси ряды, перпендикулярные к граням куба, а за единичные отрезки по осям — промежутки этих рядов, мы можем определить числовые координаты какой угодно точки решетки. Числовые координаты гомологических точек, находящихся в центрах ячеек, могут быть представлены в общем виде $r_1 + 1/_2$, $r_2 + 1/_2$, $r_3 + 1/_2$, причем, r_1, r_2 и r_3, — целые положительные или отрицательные числа.

Если мы возьмем какое-нибудь ребро, проходящее через начало кристаллографических осей и через центральную точку одной из симметрических ячеек системы, то символ такого ребра может быть представлен в виде $[2r_1 + 1, 2r_2 + 1, 2r_3 + 1] = [u_1, u_2, u_3]$, причем u_1, u_2 и u_3 будут непременно нечетными числами.

Построим плоскую сетку, проходящую через начало координат и через центральную точку какой-нибудь симметрической ячейки системы.

Эта плоская сетка, содержащая в себе центральные точки ячеек непременно будет обладать вдвое большей плотностью, по сравнению с плоскостью того же символа при гексаэдрической структуре, если только мы примем плотность грани куба за единицу.

Положим, построенная сетка содержит в себе ребро $[u_1 u_2 u_3]$.

Если символ ребра пересечения построенной плоскости с плоскостью кристаллографических осей [010] и [001] будет $[0 r_2' r_3']$, то оба индекса этого символа, не равные нулю, очевидно, не могут быть четными числами, так как в таком случае они имели бы общего делителя. Возможны только два предположения: 1) оба r_2' и r_3' — нечетные числа, 2) один из индексов четное число, а другой нечетное. Обозначив нечетный индекс через u', а четный через g, находим выражение для символа ребра при первом предположении $[0 u_2' u_3']$, а при втором — $[0 u' g]$.

В первом случае, определяя символ грани по двум ребрам $[u_1 u_2 u_3]$ и $[0 u_2' u_3']$, находим:

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ 0 & u_2' & u_3' \end{vmatrix} = (u_2 u_3' - u_2' u_3; -u u_3'; u_1 u_2').$$

Ясно, что в этом случае найденный первый индекс символа грани будет четным числом, а два другие — нечетные числа.

Во втором случае мы получаем, определяя символ грани по символам ребер: $[u_1 u_2 u_3]$ и $[0 u g]$

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ 0 & u & g \end{vmatrix} = (u_2 g - u u_3; -g u_1; u_1 u).$$

В найденном символе второй индекс будет четным, а два другие — нечетные числа.

Таким образом, если принять за единицу плотности плотность грани куба, то все грани кубически-изотропного комплекса октаэдрической структуры, имеющие два нечетных и один четный индекс символа будут вдвое плотнее граней тех же символов, в случае комплекса гексаэдрической структуры.

Примем в кубически-изотропном комплексе додекаэдрической структуры за кристаллографические оси ребра, перпендикулярные к граням куба, причем промежутки рядов по этим ребрам примем за единичные отрезки по кристаллографическим осям.

При таком допущении мы получим для выражения площадей элементарных параллелограммов граней куба $\frac{1}{4}$. В виду этого, плотности сеток граней куба будут вдвое больше плотностей сеток тех же граней в случае гексаэдрической структуры.

Так как для определения плотности сетки данной грани символа $(p_1 p_2 p_3)$ по формуле (I) необходимо пользоваться величинами элементарных параллелограммов граней (100), (010) и (001), то ясно, что, в виду изменения этих величин в случае додекаэдрической структуры, по сравнению с величинами, принимаемыми для тех же граней комплекса гексаэдрической структуры, плотности сеток всех граней при октаэдрической структуре будут, по крайней мере, вдвое больше плотностей тех же граней с случае гексаэдрической структуры.

Кроме того, плотности сеток некоторых граней, при додекаэдрической структуре, будут в четыре раза больше плотностей сеток соответственных граней комплекса гексаэдрической структуры.

Такими плотностями будут обладать те грани, в состав которых будут входить по два ряда, проходящих через точки пространственной решетки, расположенные в центрах граней симметрических ячеек решетки, характеризующих додекаэдрическую структуру.

Символы таких точек могут быть представлены общими выражениями:

$[r_1+\frac{1}{2};\ r_2+\frac{1}{2};\ r_3],\ [r_1+\frac{1}{2};\ r_2;\ r_3+\frac{1}{2}],\ [r_1;\ r_2+\frac{1}{2};\ r_3+\frac{1}{2}].$

В виду этого, соответствующие символы ребер будут:

$$[u_1 u_2 g_3],\ [u_1' g_2' u_3'],\ [g_1'' u_2'' u_3''],$$

где u — нечетные, а g — четные целые числа.

Определив, по каким-нибудь двум из трех таких символов ребер, символ грани, проходящей через эти два ребра, получим:

$$\begin{vmatrix} u_1, & u_2, & u_3 \\ u_1', & g_2', & u_3' \end{vmatrix} = (u_2 u_3' - g_2' g_3;\ g_3 u_1' - u_3' u_1;\ u_1 g_2' - u_1' u_2).$$

Таким образом, мы получаем символ, состоящий из трех нечетных индексов.

Из этого рассуждения мы можем вывести следующее общее заключение.

Если принять ребра, перпендикулярные к граням куба кубически-изотропного комплекса додекаэдрической структуры, за кристаллографические оси, а за единичные отрезки по этим осям принять промежутки соответствующих им рядов, то плотности сеток всех граней комплекса будут по крайней мере вдвое больше плотностей сеток граней тех же символов, в случае комплекса гексаэдрической структуры. Плотность сетки каждой грани, имеющей три нечетных индекса символа, в случае додекаэдрической структуры, будет в четыре раза больше плотности сетки грани того же символа в случае гексаэдрической структуры.

Для изотропных комплексов первоначальная и полярная пространственные решетки будут подобны друг другу, так как перпендикуляр к каждой грани изотропного комплекса будет возможным ребром, и притом таким ребром, которое имеет символ одинаковый с символом перпендикулярной к нему грани.

Приняв во внимание такое свойство изотропных комплексов, мы можем вывести заключение о том, что плотность каждой грани изотропного комплекса будет равна плотности перпендикулярного к ней ребра.

В виду этого, формула (II), служащая для определения плотностей сеток граней кубически-изотропного комплекса гексаэдрической структуры, может служить также и формулой для определения плотностей ребер этого комплекса.

При определении относительных плотностей ребер по этой формуле для комплексов октаэдрической и додекаэдрической структуры, мы должны иметь в виду те общие положения, которые непосредственно вытекают из всех приведенных выше рассуждений.

Эти положения следующие:

1) Все ребра с тремя нечетными индексами символа в комплексах октаэдрической структуры будут вдвое плотнее ребер с теми же символами в комплексе гексаэдрической структуры.

2) Все ребра с двумя нечетными и одним четным индексами символа в комплексах додекаэдрической структуры бу-

дут вдвое плотнее ребер тех же символов, в случае комплекса гексаэдрической структуры.

Если вычислить тангенс угла α между ребрами [1000] и [1110] в гексагонально-изотропном комплексе, то оказывается, что $tg^2\alpha = \frac{4}{3}$.

Мы знаем, что символ всякого ребра $[r_0 r_1 r_2 r_3]$ гексагонально-изотропного комплекса будет выражать собою вектор, равнодействующий четырем слагающим векторам по кристаллографическим осям, имеющим символы 1) [1000], 2) $[021\bar{1}]$, 3) [0121] и 4) $[0\bar{1}12]$. Если мы примем за 1 длину c промежутка ряда по одной из равных осей $[021\bar{1}]$, [0121] или $[0\bar{1}12]$, то длина c_0 промежутка ряда по оси [1000] будет равна $\frac{3}{2}$.

Приняв во внимание известное соотношение между индексами r_1, r_2 и r_3, а именно: $r_2 = r_1 + r_3$, мы легко можем определить длину промежутка ряда по ребру какого угодно символа $[r_0 r_1 r_2 r_3]$. Эта длина будет обратно пропорциональна плотности данного ребра.

Рассматривая ребро $[r_0 r_1 r_2 r_3]$, как равнодействующий вектор четырех его составляющих r_0, r_1, r_2 и r_3, разложим сначала три горизонтальные составляющие векторы r_1, r_2 и r_3 на слагающие по направлению рядов $[010\bar{1}]$ и перпендикулярного к нему [0121].

Разлагая r_1, получаем:

по оси $[010\bar{1}]$ — $r_1 \cos 30^0 = \frac{r_1\sqrt{3}}{2}$

по оси [0121] — $r_1 \sin 30^0 = \frac{r_1}{2}$.

Разложив r_2, получаем:

по оси $[010\bar{1}]$ — 0

по оси [0121] — r_2.

Разложив r_3, находим:

по оси $[010\bar{1}]$ — $\bar{r}_3 \cos 30^0 = -\frac{r_3\sqrt{3}}{2}$

по оси [0121] — $r_3 \sin 30^0 = \frac{r_3}{2}$.

Взяв сумму векторов по оси $[010\bar{1}]$, получаем:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}(r_1 - r_3).$$

Сумма векторов по оси $[0121]$ дает:

$$r_2 + \tfrac{1}{2}(r_1 + r_3).$$

Кроме того, мы имеем вектор по главной оси $\frac{3}{2}r_0$.

Таким образом, мы теперь имеем три составляющих вектора по трем взаимно перпендикулярным направлениям для равнодействующего вектора $[r_0 r_1 r_2 r_3]$. Так как квадрат длины D^2 равнодействующего вектора при трех взаимно перпендикулярных векторах выражается уравнением:

$$D^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2,$$

где k величины составляющих векторов, то мы можем написать:

$$D^2 = \tfrac{9}{4}r_0^2 + \tfrac{3}{4}(r_1 - r_3)^2 + [r_2 + \tfrac{1}{2}(r_1 + r_3)]^2,$$

откуда:

$$D^2 = \tfrac{9}{4}r_0^2 + 3r_1^2 + 3r_2^2 - 3r_1 r_2,$$

или

$$\frac{D^2}{3} = \tfrac{3}{4}r_0^2 + r_1^2 + r_2^2 - r_1 r_2.$$

5. ГИПОТЕЗА HAÜY И ЗАКОН BRAVAIS.

Посмотрим теперь, какое отношение имеют между собой закон наибольшей простоты символов граней, развивающихся на кристаллах, выведенный Найу, и закон наибольших плотностей сеток кристаллических граней, данный Bravais.

Выше было упомянуто, что в случае применения закона наибольшей простоты символов, мы встречаемся с различными затруднениями. Такие затруднения возникают главным образом для не изотропных кристаллических комплексов. Большая часть таких затруднений совершенно не имеет места в случае кубически-изотропных комплексов. Однако, если ближе рассмотреть приложение того и другого закона к таким изотропным комплексам, то мы сразу увидим существенное различие между этими двумя закономерностями.

Для изотропного комплекса гексаэдрической структуры мы имеем полное совпадение обоих законов, т. е. в этом случае закон наибольших плотностей сеток граней, развитых на кристалле, и закон наибольшей простоты символов граней выражают одно и то же. В самом деле, из ретикулярной теории структуры мы знаем, что для изотропных комплексов гексаэдрической структуры плотности сеток граней непосредственно определяются по их символам. Назовем плотностью сетки D какой-нибудь грани $(p_1 p_2 p_3)$ изотропного комплекса гексаэдрической структуры величину, обратную квадрату площади элементарного параллелограмма, принимая за единицу площадь такого параллелограмма для грани куба. В таком случае, между плотностью сетки грани и ее символом будет существовать весьма простая зависимость, выражаемая равенством: $D = \frac{1}{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}$, где p_1, p_2 и p_3 — индексы символа грани. Пользуясь этим равенством в случае кристаллов кубической сингонии гексаэдрической структуры, мы всегда можем определить плотность сетки какой угодно грани, зная ее символ. Кроме того, из этого равенства мы прямо заключаем, что плотности сеток граней будут быстро уменьшаться по мере усложнения символов, т. е. увеличения индексов этих последних. В самом деле, для плотностей сеток кристаллических граней рассматриваемого комплекса мы получаем, согласно вышеприведенному равенству, такие величины: (100) — 1; (110) — $\frac{1}{2}$; (111) — $\frac{1}{3}$; (120) — $\frac{1}{5}$; (112) — $\frac{1}{6}$; (122) — $\frac{1}{9}$; (130) — $\frac{1}{10}$ и т. д. Здесь грани перечислены в порядке плотностей их сеток. Этот порядок граней нарушается, если мы будем определять плотности сеток граней кубически-изотропных комплексов двух других структур.

В самом деле, для изотропного комплекса октаэдрической структуры плотности сеток граней могут быть определены по тому же самому равенству с тем различием, что грани с двумя нечетными и одним четным индексами символа будут обладать вчетверо большей плотностью, сравнительно с гранями того же символа, в случае гексаэдрической структуры. Вследствие этого, мы получаем следующие

плотности сеток кристаллических граней изотропного комплекса октаэдрической структуры: (110) — 2, (100) — 1; (112) — $\frac{2}{3}$; (130) — $\frac{2}{5}$; (111) — $\frac{1}{3}$, (321) — $\frac{2}{7}$; (114) — $\frac{2}{9}$ и т. д. Таким образом, мы видим, что уже в случае изотропных комплексов октаэдрической структуры закон наибольшей простоты символов и закон наибольших плотностей сеток не совпадают друг с другом, так как в этом случае некоторые грани более сложных символов оказываются более плотными, сравнительно с гранями более простых символов.

Для изотропных комплексов додекаэдрической структуры, грани с тремя нечетными индексами символов будут вчетверо плотнее граней тех же символов в случае гексаэдрической структуры (если принять плотность сетки грани куба за 1). В этом случае, мы получаем такой порядок граней по их плотностям сеток: (111) — $\frac{4}{3}$; (100) — 1; (110) — $\frac{1}{2}$; (113) — $\frac{4}{11}$; (133) — $\frac{4}{19}$; (120) — $\frac{1}{5}$ (112) — $\frac{1}{6}$ и т. д. Итак, мы опять находим несоответствие второго закона Найу с законом Bravais.

Таким образом, мы видим, что даже в случае комплексов кубической сингонии, исключающих те специальные затруднения, которые возникают при применении закона наибольшей простоты символов к комплексам других сингоний, мы получаем совершенно определенные несоответствия между этим законом и законом наибольших плотностей сеток кристаллических граней.

Благодаря этому, мы только путем опыта и наблюдения можем решить вопрос о том, который из этих двух законов должен быть признан за действительно правильный.

Исследуя с этой точки зрения обширный опытный материал, накопленный кристаллографией до настоящего времени, мы видим, что в очень многих случаях прямой опыт противоречит второму закону Найу, так как очень часто на кристаллах развиваются грани более сложных символов, чем те, которые на них никогда не образуются. Если вдуматься в то, что нам дает опыт, то мы, в конце концов, придем к полному убеждению в том, что закон наибольшей простоты символов оправдывается, именно только для кубически-изотропных комплексов гексаэдрической структуры или близких к ним.

В случае же комплексов других структур или даже гексаэдрической структуры, но резко отличающихся от изотропных, закон наибольшей простоты символов уже не имеет места. Он больше уже не оправдывается опытом, который, в то же время, вполне подтверждает правильность закона наибольших плотностей сеток граней, развитых на кристаллах. Таким образом, закон наибольшей простоты символов только до тех пор справедлив, пока он совпадает с законом наибольших плотностей сеток кристаллических граней. Как только такое совпадение перестает существовать, в то же время перестает оправдываться на опыте и самый закон наибольшей простоты символов. Рассматривая более детально ту связь, которая существует между этими двумя закономерностями, мы можем вывести следующее положение: существует закон наибольших плотностей сеток граней, развивающихся на кристаллах — это один из самых общих законов кристаллизации.

Так как для кубически-изотропного и близких к нему комплексов гексаэдрической структуры, грани с наиболее простыми символами обладают, в то же время, наибольшими плотностями сеток, то, в этих случаях, закон наибольшей простоты символов является прямым следствием закона наибольших плотностей сеток граней, развивающихся на кристалле форм.

6. ЗАКОН КРИСТАЛЛОГРАФИЧЕСКИХ ПРЕДЕЛОВ.

Кроме закона наибольших плотностей сеток из обширного материала кристаллографических исследований, произведенных до настоящего времени, был извлечен проф. Е. С. Федоровым один общий закон, оправдывающийся во всех известных до сих пор случаях. Этот закон, выяснившийся в результате рациональной обработки экспериментальных данных и гониометрических исследований, может быть назван законом кристаллографических пределов (Limitgesetz). Общий смысл этого закона может быть выражен так: все кристаллы или псевдотетрагональны или псевдогексагональны в широком смысле этого слова. Опираясь на теорию структуры кристаллов с одной стороны, и на выведенный из опытных дан-

ных закон кристаллографических пределов с другой стороны, мы можем предсказать некоторые правильности, которые действительно и наблюдаются в кристаллах при их образовании.

Для того, чтобы воспользоваться тем, что нам может дать закон кристаллографических пределов, необходимо прежде всего точно установить общий смысл и значение этого закона. Общий смысл закона кристаллографических пределов состоит в том, что признается существование некоторых идеальных видов кристаллических комплексов, к которым стремятся приблизиться все кристаллы при их образовании.

Такими идеалами для кристаллов являются не кубические и гексагональные изотропные комплексы, а те комплексы, которые принадлежат кристаллам тетрагональной и гексагональной сингонии.

Переходя к характеристике отдельных комплексов посредством принадлежащих им комплексиальных эллипсоидов, мы видим, что идеальные комплексы характеризуются эллипсоидами, имеющими вид эллипсоидов вращения, между тем как эллипсоидами для изотропных комплексов будут служить шары, представляющие собой частный случай эллипсоидов вращения с равными осями.

В законе кристаллографических пределов заключается совершенно определенное утверждение, которое может быть выражено таким образом: те идеальные кристаллические комплексы, к которым стремятся приблизиться все кристаллы, образующиеся тем или иным путем, представляют собою такие комплексы, которые характеризуются комплексиальными эллипсоидами в виде самых разнообразных эллипсоидов вращения, а не только одним или некоторыми частными случаями этих последних.

В этом утверждении заключается коренное различие между законом кристаллографических пределов и тем принципом Mallard'a, который был выведен этим ученым в 1884 году. Сущность этого принципа состоит в утверждении, что для всех без исключения кристаллов пространственная решетка, образованная центрами тяжести их молекул, та же самая или почти та же самая, как и кубическая. Те, сравнительно

небольшие, различия, которые существуют между этой последней решеткой и реальной решеткой центров тяжести, представляют собою, вместе со специальной молекулярной гемитропией и молекулярным объемом, кристаллическую индивидуальность, особую для каждого вещества.

Таким образом, по принципу Mallard'а все кристаллы стремятся приблизиться к тому идеалу, который характеризуется именно эллипсоидом сингонии в виде шара, причем гексагонально-изотропный комплекс, также характеризующийся шаром, служащим в этом случае эллипсоидом сингонии, совершенно игнорируется учением Mallard'а.

Почти тотчас же после опубликования статьи Mallard'а, в которой он устанавливает свой принцип, этот принцип получил весьма широкое распространение и был принят многими кристаллографами, пытавшимися применить его при своих кристаллографических исследованиях для получения правильной установки кристаллов. Однако, уже с самых первых шагов применения принципа Mallard'а встретились очень важные затруднения, приведшие в конце концов к тому, что мало-по-малу принцип Mallard'а перестал пользоваться той популярностью, которую он имел в первое время после своего появления.

Такая судьба принципа Mallard'а объясняется тем, что его применение при обработке фактического материала, в большинстве случаев, возможно только при условии полного игнорирования закона наибольших плотностей сеток граней, развивающихся на кристаллах.

Можно сказать, что почти всегда, применяя принцип Mallard'а, мы должны приписывать граням, развитым на кристалле, настолько сложные символы, что плотности сеток таких граней будут очень невелики, сравнительно с плотностями сеток тех граней, которые совершенно не появляются на кристалле, а это, как раз, противоречит общему закону Bravais, о котором было сказано выше. Таким образом, можно сказать, что закон наибольших плотностей сеток и принцип Mallard'а, в большинстве случаев, прямо противоречат друг другу.

Кроме того, если даже признать закон наибольших плотностей сеток не заслуживающим доверия, а, наоборот, признать правильным принцип Mallard'a, то при ближайшем исследовании сущности этого принципа выясняется, что ему все-таки совершенно невозможно придавать того значения, которое ему старались приписать некоторые авторы, думавшие, что принцип Mallard'a вносит однообразие в кристаллографическое описание веществ, так как естественной установкой кристалла является, согласно этому принципу, та, в которой грани кристалла, своим взаимным расположением и наклоном, отвечают комбинации форм правильной системы, не обращая внимания на симметрию.

Однако, принцип Mallard'a, противоречащий закону наибольших плотностей сеток граней, развитых на кристалле, совершенно не оправдал, да и не мог оправдать тех надежд, относительно упорядочения установки кристаллов, которые на него возлагались.

В самом деле, если, при нахождении правильной установки кристаллов данного соединения, руководствоваться только тем, чтобы плоскости кристаллографических осей, выбираемых для характеристики данного комплекса, были по возможности ближе к взаимной перпендикулярности, а единичные отрезки по таким осям, почти равными между собой, причем символы граней, развитых на кристалле форм, могут быть какой угодно сложности, то самое положение таких кристаллографических осей делается совершенно неопределенным. Такой неопределенности можно избегнуть только в том случае, если мы при установке кристалла будем постоянно руководствоваться законом наибольших плотностей сеток, образующихся на кристалле граней. В виду того, что закон наибольших плотностей сеток имеет, как теоретическое обоснование, так и фактическое оправдание, вполне естественно признать тот принцип, который противоречит этому закону, неправильным, хотя бы он и был выведен из некоторых случайных наблюдений, вполне его оправдывающих. Повидимому, единственно только стремление внести одну общую идею в разрозненные кристаллографические описания различных веществ могло побудить многих

кристаллографов придерживаться принципа Mallard'a и применять его при своих исследованиях, несмотря на то, что его несостоятельность была вполне установлена громадным фактическим материалом. Такое стремление к порядку и однообразию вполне законно и естественно и, именно, навстречу этому стремлению идет тот закон кристаллографических пределов, который, как это было уже сказано выше, установлен Е. С. Федоровым. Этот закон вполне согласован с законом наибольших плотностей сеток кристаллических граней, причем и тот и другой закон находят себе полное подтверждение решительно во всех известных нам случаях.

На основании закона приближения всех комплексов к идеальным, мы можем сказать, что пространственная решетка, характеризующая комплекс кристаллов какого угодно кристаллического вещества, будет близка к той решетке, которая характеризует идеальные комплексы, т. е. комплексы кристаллов тетрагональной и гексагональной сингоний.

Этот закон будет вполне применим во всех случаях; все равно, будет ли взятый для рассмотрения комплекс относиться к ромбической, моноклинной или триклинной сингониям, обладающим низшей симметрией, сравнительно с комплексами тетрагональной и гексагональной сингоний.

Именно в этом и заключается наиболее общий смысл и значение выведенного Е. С. Федоровым закона пределов для кристаллических комплексов. Итак, приступая к кристаллографическому исследованию какого-нибудь вещества, мы уже заранее знаем, что кристаллы этого вещества будут характеризоваться пространственной решеткой, близкой к тетрагональной или гексагональной.

Посмотрим теперь, нельзя ли связать внешний облик кристалла и те данные, которые мы получаем после его гониометрического исследования, с внутренним его строением, а именно с его пространственной решеткой, приблизительное значение которой мы уже знаем. Можно сказать, что, в громадном большинстве случаев, такую связь внутренняго строения кристалла с его внешними формами установить возможно, прямо исходя из тех данных, которые мы получаем при гониометрическом исследовании кристаллического многогран-

ника. При установлении такой связи необходимо не упускать из вида закон наибольших плотностей сеток граней, развитых на кристалле форм, который в каждом реальном случае должен быть вполне согласован с законом кристаллографических пределов. Это согласование двух основных законов кристаллизации производится на основании специальных критериев правильной установки, о которых будет подробно сказано дальше.

7. ИЗОТРОПНЫЕ И ИДЕАЛЬНЫЕ КОМПЛЕКСЫ.

Как мы уже видели, каждую пространственную решетку можно превратить во всякую другую посредством соответственных растяжений и сдвигов, или, другими словами, мы можем всегда данный кристаллический комплекс превратить в какой угодно другой, подвергая его соответственным гомогенным деформациям растяжения и сдвига.

Посмотрим теперь, каким образом проще всего, пользуясь гомогенными деформациями, мы можем перейти от комплекса кубической сингонии к комплексу тетрагональной сингонии. Заметим, что кубически-изотропный комплекс обладает, как известно, следующими осями симметрии: в этом комплексе мы имеем три четверных оси симметрии, кроме того, в этом же комплексе имеется шесть двойных осей симметрии и четыре тройных.

Представим себе, что у нас имеется какой-нибудь кристалл, обладающий идеальной эластичностью и кристаллизующийся в виде многогранника кубической сингонии. Такой кристалл, являющийся представителем идеально-эластичного кубически-изотропного комплекса, очень легко может быть, посредством одной гомогенной деформации, переведен в кристалл тетрагональной сингонии. В этом случае такой переход может быть осуществлен путем только одного прямого растяжения по направлению одной из трех четверных осей симметрии, имеющихся в комплексе этого кристалла, причем плоскостью растяжения служит плоскость симметрии, перпендикулярная к той четверной оси симметрии, по которой производится растяжение.

Положим, мы произведем такую гомогенную деформацию положительного растяжения по оси [001] нашего идеально-эластичного изотропного комплекса.

После операции растяжения, грани пояса [001], изменив свои размеры, останутся на прежних местах, так же, как и их гномостереографические проекции. Углы между гранями этого пояса сохранят свои величины, и после растяжения этот пояс будет представлять собою зону тетрагональных и дитетрагональных призм. Все другие грани, кроме [001], проектирующейся в центре диаграммы, переместятся таким образом, что их угловое расстояние от центра будет увеличиваться по мере растяжения (здесь подразумевается перемещение перпендикуляров). Следовательно, углы, которые мы можем отсчитать в проекции для кубически-изотропного комплекса, будут увеличиваться, в случае положительного растяжения, для всех граней, исключая граней вертикального пояса. Грани комплекса в гномостереографической проекции, в случае положительного растяжения, двигаются от центра к окружности, при чем это движение будет происходить по радиусам стереографической сетки.

Итак, в случае такого движения гномостереографических проекций от центра к окружности при гомогенной деформации растяжения, мы имеем положительное растяжение комплекса. Если бы движение граней оказалось обратным, т. е. гномостереографические проекции всех граней двигались бы по радиусам стереографической сетки от окружности ее внешнего круга по направлению к его центру, то мы имели бы случай отрицательного растяжения, которое, другими словами, может быть обозначено как сжатие комплекса по оси [001]. В том и другом случае наш изотропный комплекс идеально-эластичного кристалла превращается в тетрагональный комплекс, благодаря тому, что растяжение происходит по четверной оси симметрии, причем пояс тетрагональных призм остается идентичным поясу кубически-изотропного комплекса, имеющему то же положение, т. е. остается изотропным поясом и в деформированном комплексе.

Та четверная ось симметрии кубически-изотропного комплекса, по которой было произведено растяжение, сохраняет свое

положение и значение четверной оси симметрии в полученном путем растяжения тетрагональном комплексе. Все другие оси симметрии кубически-изотропного комплекса, не проектирующиеся на внешнем круге стереографической сетки, теряют свое значение осей симметрии. Четверные оси симметрии кубически-изотропного комплекса, перпендикулярные граням (100) и (010) превращаются после гомогенной деформации растяжения в двойные, между тем как двойные оси симметрии, проектирующиеся на внешнем круге диаграммы, сохраняют свое положение и значение двойных осей и для нового комплекса. Таким образом, кубически-изотропный комплекс, после гомогенной деформации прямого растяжения по четверной оси (произвольной величины и знака), переходит в комплекс тетрагональной сингонии с одной четверной и четырьмя двойными осями симметрии.

Что касается плоскостей симметрии кубически-изотропного комплекса, то мы видим, что после гомогенной деформации растяжения сохраняют свое положение и значение все те плоскости, которые перпендикулярны плоскости растяжения, т. е. все те плоскости, которые проходят через четверную ось, служащую направлением растяжения. Кроме того, та плоскость симметрии, которая перпендикулярна к четверной оси симметрии, служившей направлением растяжения, точно также сохраняет свое значение плоскости симметрии и в выведенном тетрагональном комплексе.

Таким образом, общая симметрия полученного нами тетрагонального комплекса соответствует дитетрагонально-дипирамидальному виду симметрии, так как мы имеем налицо одну четверную и четыре двойных осей симметрии, а кроме того еще пять плоскостей симметрии.

Итак, при помощи одной гомогенной деформации растяжения мы можем вывести из кубически-изотропного комплекса комплекс тетрагональной сингонии. Такой комплекс, по закону кристаллографических пределов, является одним из тех идеальных комплексов, к которым стремятся приблизиться некоторые кристаллы при своем образовании и носит название идеального тетрагоналоидного комплекса.

Тот же закон кристаллографических пределов, утверждающий, что все кристаллы или псевдотетрагональны или псевдогексагональны, указывает нам еще на другие идеальные комплексы, а именно, на комплексы гексагональной сингонии.

Примем за плоскость стереографической проекции кубически-изотропного комплекса ту плоскость, которую мы можем провести через центр симметрии этого комплекса, перпендикулярно к его тройной оси симметрии [111]. В этом случае, следовательно, тройная ось симметрии [111] будет проектироваться в центре стереографической сетки. Общий вид такой проекции граней с наибольшей плотностью сеток представлен на рис. 187. Заметим, что пояс кубически-изотропного комплекса, определяющийся гранями $(\bar{1}10)$ и $(0\bar{1}1)$, идентичен поясу (1000) комплекса гексагональной сингонии.

Если мы будем производить гомогенную деформацию положительного или отрицательного растяжения идеально-эластичного кубически-изотропного комплекса по его тройной оси симметрии [111], приняв за плоскость растяжения перпендикулярную к этой оси плоскость, проходящую через центр симметрии комплекса и параллельную грани октаэдра (111), то в результате, после такого растяжения, получим еще один из идеальных комплексов, а именно комплекс кристалла тригональной гипосингонии.

В самом деле, произведя деформацию растяжения кубически-изотропного комплекса по одной из четырех тройных осей симметрии, которыми он обладает, мы увидим, что из всех его элементов симметрии останутся только те, которые или перпендикулярны плоскости растяжения или находятся в этой последней. Следовательно, произведя подобную гомогенную деформацию, мы получим комплекс, имеющий одну тройную и три двойных оси симметрии, а кроме того три плоскости симметрии, проходящих через тройную ось и делящих пополам углы между двойными осями симметрии. Таким образом, из кубически-изотропного комплекса, опять путем одной гомогенной деформации растяжения, мы можем вывести комплекс, относящийся к дитригонально-скалено-

эдрическому виду симметрии гексагональной сингонии. Этот комплекс будет новым представителем одного из тех идеальных образцов, к которым, согласно закону кристаллографи-

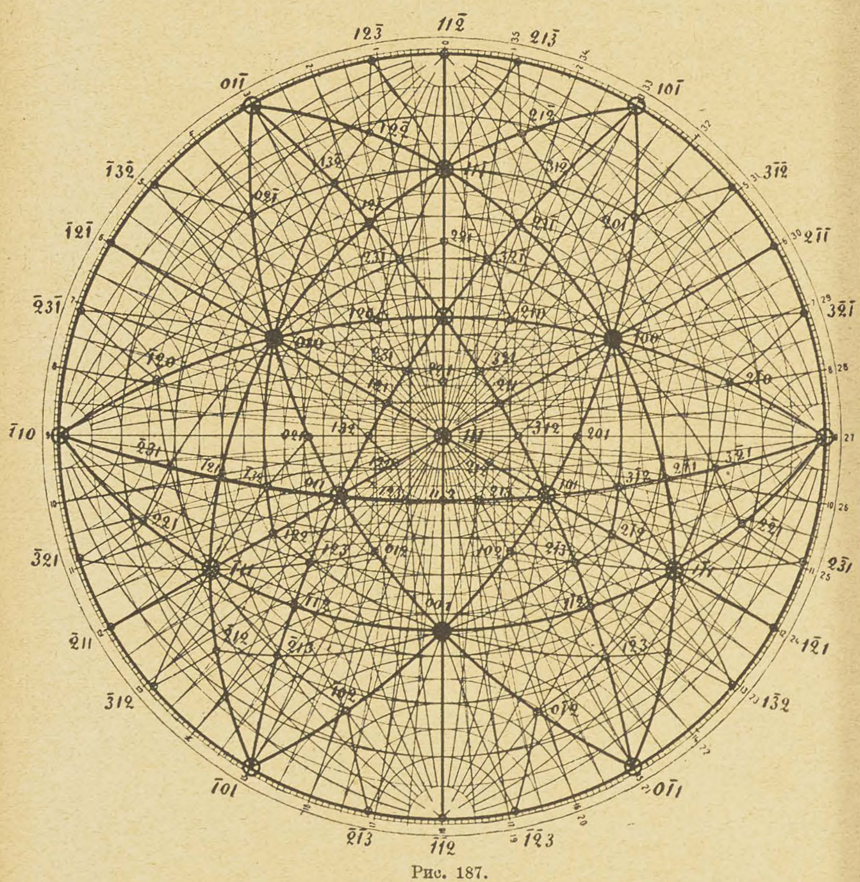


Рис. 187.

ческих пределов, стремятся некоторые кристаллы при своем образовании. Такой комплекс, относящийся по своей симметрии к тригональной гипосингонии, носит название идеального тригоналоидного комплекса.

Таким образом, исходя из кубически-изотропного комплекса, т. е. такого комплекса, который характеризует собою кубический тип строения кристаллов, мы можем вывести два идеальных комплекса, пользуясь одной единственной гомогенной деформацией прямого растяжения, причем, как мы видели выше, получение того или другого комплекса зависит исключительно от изменения направления и плоскости применяемой гомогенной деформации. Благодаря тому, что, как тетрагоналоидный, так и тригоналоидный идеальные комплексы выводятся из кубически-изотропного, мы относим эти комплексы к кристаллам кубического типа. Вследствие этого, как тригоналоидные, так и тетрагоналоидные комплексы могут обладать каждой из трех структур кубически-изотропного комплекса: гексаэдрической, октаэдрической или додекаэдрической.

Как известно, гексагональная сингония делится на две гипосингонии. С одной стороны, мы имеем тригональную гипосингонию, к которой относится полученный нами идеальный тригоналоидный комплекс, а с другой стороны, в той же гексагональной сингонии имеется гексагональная гипосингония.

Мы можем получить, путем одной гомогенной деформации растяжения кубически-изотропного комплекса, только два комплекса, относящихся к гексагональной гипосингонии.

Для получения одного из этих комплексов мы должны сделать гомогенную деформацию положительного растяжения кубически-изотропного комплекса по одной из двойных осей симметрии, приняв за плоскость растяжения плоскость симметрии, перпендикулярную к L^2. Для получения второго комплекса необходимо произвести деформацию отрицательного растяжения кубически-изотропного комплекса также по одной из L^2.

Оба такие комплекса получаются, если подвергнуть гомогенной деформации положительного или отрицательного растяжения пространственную решетку, имеющую куб в качестве основного элементарного параллелепипеда.

Произведем растяжение кубического элементарного параллелепипеда по L^2 до тех пор, пока он не превратится в

такую комбинацию ромбической призмы и пинакоида ромбо-дипирамидального вида симметрии, в которой грань пинакоида будет ромб с внутренними углами в 60^0 и 120^0.

В случае положительного растяжения, длина каждой стороны такого ромба будет относиться к расстоянию между гранями пинакоида, принятому за 1, как $\sqrt{2}$.

Если мы сделаем отрицательное растяжение по L^2 кубического основного параллелепипеда, то, приняв расстояние между гранями пинакоида за $\sqrt{3}$, получим для выведенного элементарного параллелепипеда отношение длины стороны грани пинакоида к расстоянию между этими гранями, как $\sqrt{3} : \sqrt{2}$.

В самом деле, положим, мы имеем некоторый куб, изображенный в прямой ортогональной проекции на рис. 188 в виде квадрата $acbd$. Приняв плоскость, содержащую в себе две диагонали взятого куба (проходящую через два ребра куба) и проектирующуюся в виде линии ab, за плоскость прямого растяжения куба, причем, направление растяжения будет параллельно ef, и сделав положительное растяжение, мы можем превратить квадрат $abcd$ в ромб $afbe$.

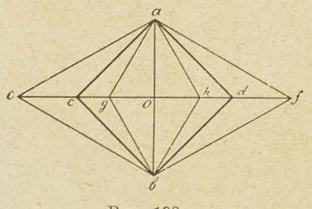


Рис. 188.

Принимая:

$$ad = bd = bc = ac = 1; \quad \angle oad = 45^0, \quad \angle oaf = 60^0,$$

находим из прямоугольного треугольника aod:

$$ao = od = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Из прямоугольного треугольника aof получаем:

$$af = \frac{ao}{\cos 60^0} = 2\,ao = \sqrt{2}.$$

При отрицательном растяжении куба по той же оси, и принимая ту же плоскость растяжения ab, получаем ромб

$ahbg$, причем производим растяжение до тех пор, пока угол gah не сделается равным 60^0. В этом случае, мы имеем из прямоугольного треугольника aoh:

$$ah = \frac{ao}{\sin 60^0} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Кроме этих двух комплексов гексагональной гипосингонии мы не можем получить ни одного комплекса дигексагонально-дипирамидального вида симметрии путем одной гомогенной деформации прямого растяжения кубически-изотропного комплекса по одной из его осей симметрии.

Все остальные комплексы гексагональной гипосингонии могут быть выведены при помощи одной гомогенной деформации растяжения по главной оси симметрии L^6 или 1) двух, только что описанных гипогексагональных комплексов, получающихся из кубически-изотропного или 2) гексагонально-изотропного комплекса.

Как мы уже видели, все комплексы гексагональной гипосингонии относятся к дигексагонально-дипирамидальному виду симметрии и принадлежат к гипогексагональному типу строения, имеющему одну единственную призматическую структуру.

Эти комплексы носят название идеальных гексагоналоидных комплексов.

Посмотрим теперь, какое имеется соотношение между кристаллическими комплексами гипогексагонального типа и тригоналоидными — кубического типа. Как мы уже видели, оба идеальных комплекса, как гексагоналоидный, так и тригоналоидный, принадлежат кристаллам гексагональной сингонии. Зоны призм этих двух комплексов совершенно идентичны между собой. Главное и основное различие идеального тригоналоидного и гексагоналоидного комплексов заключается в наименовании особой оси симметрии. Такой осью симметрии, в случае гексагоналоидного идеального комплекса, служит шестерная ось симметрии, а в случае тригоналоидного идеального комплекса — тройная ось симметрии. Шестерную ось симметрии можно рассматривать, как результат слияния в одной двух осей симметрии: тройной и двойной. Таким образом, особая ось симметрии идеального

гексагоналоидного комплекса заключает в себе тот элемент симметрии, который служит главной характеристикой тригоналоидного идеального комплекса. Благодаря этому, кристаллы тригональной гипосингонии могут быть как гипогексагонального, так и кубического типа строения, и обладать всеми четырьмя возможными для кристаллов структурами: гексаэдрической, октаэдрической, додекаэдрической и призматической. Виды симметрии гексагональной гипосингонии характеризуются или присутствием шестерной оси симметрии, являющейся главной особой осью, или тройной осью симметрии, связанной с перпендикулярной к ней плоскостью симметрии, превращающей тройную ось в шестерную ось сложной симметрии второго рода. Таких элементов симметрии в идеальном тригоналоидном комплексе нет, а потому кристаллы гексагональной гипосингонии могут быть исключительно только гипогексагонального типа, причем они могут обладать единственной призматической структурой.

Резюмируя все сказанное выше относительно идеальных комплексов, мы приходим к следующим выводам: кристаллы тетрагональной сингонии могут быть только тетрагоналоидными, а, следовательно, исключительно кубического типа. Они могут обладать тремя структурами, возможными для тетрагоналоидных кристаллов вообще: гексаэдрической, октаэдрической и додекаэдрической. Кристаллы тригональной гипосингонии могут представлять из себя идеальные комплексы, как кубического, так и гипогексагонального типа, и благодаря этому, они могут обладать всеми четырьмя возможными кристаллическими структурами: гексаэдрической, октаэдрической, додекаэдрической и призматической. Кристаллы гексагональной гипосингонии могут быть исключительно только гипогексагонального типа, причем все они обладают единственной призматической структурой.

Каждый идеальный комплекс может быть выведен из соответственного изотропного при помощи одной единственной гомогенной деформации положительного или отрицательного растяжения, причем направлением растяжения служит та ось симметрии изотропного комплекса, которая является глав-

ной характеристикой выводящегося из него, посредством гомогенной деформации, идеального комплекса.

Плоскостью растяжения в каждом данном случае служит та плоскость, которая проходит через центр симметрии деформирующегося изотропного комплекса и перпендикулярна к той его оси симметрии, по которой производится гомогенная деформация растяжения.

8. ПРИНЦИП МИНИМУМА ГОМОГЕННЫХ ДЕФОРМАЦИЙ.

На основании общих свойств гомогенных деформаций, как это было сказано выше, мы можем каждый кристаллический комплекс превратить во всякий другой, подвергнув его соответственным растяжениям и сдвигам. Если мы будем рассматривать закон кристаллографических пределов с точки зрения тех гомогенных деформаций, которым мы должны подвергнуть идеальный комплекс, чтобы из него получить комплекс кристалла уже не идеального, а только приближающегося к таковому и, следовательно, относящегося уже к какой-нибудь другой сингонии, то мы можем сказать, что в этом законе, утверждающем всеобщую псевдо-тетрагональность или псевдо-гексагональность всех кристаллов какого угодно вещества, заключается одно чрезвычайно важное утверждение. Это утверждение может быть формулировано таким образом: те гомогенные деформации, которые переводят идеальный комплекс в комплекс другой сингонии, уже не являющийся идеальным, а только стремящийся приблизиться к таковому, должны быть вообще сравнительно очень незначительны. Если, при рассмотрении какого-нибудь комплекса, мы выводим заключение, что наш комплекс может быть превращен в соответствующий ему идеальный только путем гомогенных деформаций значительной величины, то такое заключение дает повод сомневаться в правильности тех предположений, на основании которых мы к нему приходим. Таким образом, закон кристаллографических пределов вводит принцип минимума гомогенных деформаций, служащих для превращения данного кристаллического ком-

плекса в соответствующий ему идеальный и обратно. Этот принцип минимума гомогенных деформаций совершенно не имеет места для случая получения идеальных комплексов из изотропных. В самом деле, какую бы величину не имела та гомогенная деформация положительного или отрицательного растяжения, которой мы подвергаем данный изотропный комплекс для превращения его в идеальный, мы, во всяком случае, после гомогенной деформации получаем всетаки такой комплекс, который будет служить идеальным для кристаллов других сингоний, стремящихся приблизиться к данному образцу.

9. ВЫВОД РАЗЛИЧНЫХ КОМПЛЕКСОВ ИЗ ИДЕАЛЬНЫХ.

Применяя принцип минимума гомогенных деформаций идеальных кристаллических комплексов, посмотрим, каким образом мы можем из комплекса тетрагональной и гексагональной сингоний вывести комплексы других сингоний, обладающих низшей симметрией, сравнительно с названными.

Для превращения тетрагоналоидного идеального комплекса в комплекс ромбической сингонии нам совершенно достаточно подвергнуть идеальный комплекс одной единственной гомогенной деформации растяжения. За ось такого растяжения мы можем принять какую угодно одну из четырех двойных осей симметрии тетрагоналоидного идеального комплекса, а за плоскость растяжения — перпендикулярную к этой оси плоскость симметрии. Произведя такую гомогенную деформацию положительного или отрицательного растяжения, мы превратим четверную ось симметрии изотропного комплекса в двойную. Та двойная ось симметрии, по которой производится операция растяжения, сохранит свое значение двойной оси и в деформированном комплексе. Двойная ось симметрии идеального комплекса, находящаяся в плоскости растяжения, останется после деформации растяжения, не изменив ни своей величины, ни значения. Из плоскостей симметрии тетрагоналоидного комплекса останутся на месте и сохранят свое значение элементов симметрии только те плоскости,

которые проходят через двойную ось симметрии, совпадающую с направлением растяжения, а также плоскость симметрии, служащая плоскостью этой гомогенной деформации. Остальные две двойных оси и две плоскости симметрии, которыми обладает тетрагоналоидный идеальный комплекс, исчезнут после гомогенной деформации. Таким образом, в новом комплексе, полученном при помощи рассматриваемой гомогенной деформации, мы будем иметь три двойных взаимно-перпендикулярных оси симметрии и три плоскости симметрии, проходящих через эти оси. Благодаря этому, мы заключаем, что выведенный комплекс будет относиться к ромбо-дипирамидальному виду симметрии ромбической сингонии.

Применяя совершенно аналогичные рассуждения к гексагоналоидному идеальному комплексу, мы видим, что из этого комплекса мы также можем получить комплекс ромбо-дипирамидального вида симметрии ромбической сингонии путем одного только растяжния по одной из шести двойных осей симметрии идеального комплекса. Приняв одну из таких осей симметрии за направление растяжения, а перпендикулярную к ней плоскость симметрии за плоскость растяжения, мы увидим, что после растяжения гексагоналоидного идеального комплекса шестерная ось симметрии, характеризующая этот комплекс, превращается в двойную. Из шести двойных осей симметрии идеального комплекса, перпендикулярных шестерной, остается после растяжения только две, перпендикулярных между собой; одна — та, по которой производится растяжение, а другая — находящаяся в плоскости растяжения. Из семи плоскостей симметрии гексагоналоидного идеального комплекса сохранится только три плоскости, проходящие через оставшиеся оси симметрии. Таким образом, мы, и в этом случае, получаем опять в результате нашей гомогенной деформации комплекс ромбо-дипирамидального вида симметрии ромбической сингонии.

Рассматривая оба случая перехода тетрагоналоидного и гексагоналоидного идеальных комплексов в комплексы ромбической сингонии при помощи гомогенной деформации растяжения, мы видим, что такая деформация может иметь во-

обще какую угодно величину. Применяя принцип минимума гомогенной деформации, мы можем сказать, что величина растяжения по двойной оси симметрии, для перехода от идеального комплекса к ромбическому, должна быть в каждом реальном случае сравнительно очень не велика.

Из общего соотношения элементов симметрии тригоналоидного идеального комплекса вполне выясняется невозможность перехода от такого идеального комплекса к комплексу ромбической сингонии при помощи одной гомогенной деформации растяжения или сдвига, согласованной с принципом минимума гомогенных деформаций. В самом деле, если мы произведем растяжение идеального тригоналоидного комплекса по одной из трех его двойных осей симметрии, принимая за плоскость растяжения перпендикулярную к направлению растяжения плоскость симметрии идеального тригоналоидного комплекса, то при таком растяжении сохранит свое положение и значение только одна двойная ось симметрии, а также та плоскость симметрии, которая служит плоскостью растяжеиия. Остальные оси и плоскости симметрии идеального тригоналоидного комплекса исчезнут и, в результате, после растяжения, получится комплекс, обладающий ромбо-призмтическим видом симметрии моноклинной сингонии. В этом моноклинном комплексе мы можем заметить одну особенность, отличающую его от большинства других моноклинных комплексов. Эта особенность заключается в следующем: если принять за три кристаллографические оси для идеального тригоналоидного комплекса: 1) тройную ось симметрии, 2) одну двойную ось симметрии и 3) перпендикуляр к плоскости этих двух осей симметрии, то такие кристаллографические оси в выведенном растяжением по оси L^2 моноклинном комплексе будут взаимно перпендикулярны, хотя комплекс и не будет обладать ни одним из видов симметрии ромбической сингонии. Благодаря такой особенности выведенного моноклинного комплекса, имеющего много реальных представителей, его можно назвать специальным псевдо-ромбическим тригоналоидным комплексом. Такое название можно употребить потому, что, в случае выбора указанных выше кристаллографических осей, и принимая во

внимание их прямоугольность, мы вполне определили бы этот специальный комплекс, дав отношения отрезков по трем кристаллографическим осям. Между тем, такая характеристика относится к комплексам ромбической сингонии, если придерживаться принимаемых большинством авторов еще до настоящего времени условий характеристики комплексов.

Таким образом, подвергая идеальный тригоналоидный комплекс растяжению по одной из его двойных осей симметрии, мы не можем получить ромбического комплекса, а переходим к моноклинному. Принимая во внимание принцип минимума гомогенных деформаций, мы заключаем, что, вообще, из тригоналоидного идеального комплекса невозможно получить комплекса ромбической сингонии, пользуясь небольшими гомогенными деформациями. Благодаря этому, ромбические кристаллы могут быть только тетрагоналоидными и гексагоналоидными, но отнюдь не тригоналоидными.

Каждый ромбический комплекс можно превратить в моноклинный при помощи гомогенной деформации одного сдвига совершенно определенного положения. Этот сдвиг, называемый моноклинным, должен быть произведен таким образом, чтобы из всех элементов симметрии ромбического комплекса осталась бы после операции сдвига одна двойная ось и перпендикулярная к ней плоскость симметрии. Такой деформации можно достигнуть, если произвести сдвиг, направление которого будет параллельно остающейся после операции сдвига плоскости симметрии, к которой должна быть перпендикулярна плоскость такого сдвига. За эту плоскость принимается одна из двух, исчезающих после гомогенной деформации, плоскостей симметрии ромбического комплекса. При таком сдвиге двойная ось симметрии ромбического комплекса, перпендикулярная к остающейся плоскости симметрии, будут находиться в плоскости сдвига и, следовательно, сохранит свое значение двойной оси симметрии в деформированном комплексе. Все остальные оси и плоскости симметрии ромбического комплекса потеряют свое значение элементов симметрии после операции сдвига. Таким образом, полученный путем гомогенной деформации сдвига моноклинный комплекс будет обладать двойной осью симметрии и пер-

пендикулярной к ней полоскостью симметрии, т. е. будет комплексом моноклинной сингонии ромбо-призматического вида симметрии. Если мы подвергнем моноклинному сдвигу специальный псевдо-ромбический тригоналоидный комплекс, причем за плоскость сдвига примем плоскость, перпендикулярную его плоскости симметрии, то получим обыкновенный тригоналоидный моноклинный комплекс.

Вообще, при помощи моноклинного сдвига, мы можем превратить в моноклинные комплексы каждый изотропный и каждый идеальный комплекс, не превращая их предварительно в ромбические. Однако, такое превращение будет давать в результате только частные случаи возможных и действительно наблюдающихся моноклинных комплексов, имеющих сравнительно немного реальных представителей.

Наиболее общим случаем для комплексов триклинной сингонии должен считаться такой комплекс, который выводится из моноклинного при помощи гомогенной деформации, так называемого, триклинного сдвига. Плоскость этого сдвига перпендикулярна плоскости симметрии моноклинного комплекса, а его направление находится в плоскости, также перпендикулярной к этой плоскости симметрии. Так как положение плоскости триклинного сдвига обусловлено только ее перпендикулярностью к плоскости симметрии моноклинного комплекса, а таких плоскостей может быть бесконечное множество, то ясно, что плоскость триклинного сдвига не имеет какого-нибудь заранее определенного положения в триклинном комплексе и должна быть определена для каждого данного случая отдельно. Обыкновенно, плоскость триклинного сдвига не имеет положения рациональной плоскости триклинного комплекса.

В частных случаях, триклинный комплекс может быть получен из каждого комплекса любой сингонии прямо при помощи триклинного сдвига с иррациональной плоскостью. Реальные представители таких комплексов известны и встречаются довольно часто.

В каждом данном случае, вывод комплексов ромбической, моноклинной и триклинной сингоний из идеальных должен быть согласован с принципом минимума тех гомогенных де-

формаций, которым мы должны подвергнуть идеальный комплекс для получения комплекса другой сингонии.

Из всего вышеизложенного мы можем вывести такое заключение: существуют два общих закона кристаллизации, вполне установленных экспериментально; с одной стороны закон наибольших плотностей сеток граней, развивающихся на кристаллах, а с другой стороны закон кристаллографических пределов, заключающий в себе утверждение о псевдо-тетрагональности или псевдо-гексагональности каждого кристаллического комплекса.

Основываясь на этих двух законах, мы можем делать правильную установку кристаллов, вполне отвечающую их внутреннему строению.

10. СВЯЗЬ МЕЖДУ ВНУТРЕННИМ СТРОЕНИЕМ И ВНЕШНИМ ВИДОМ КРИСТАЛЛА.

Уже только приняв во внимание, что на кристаллах всегда образуются грани наибольшей ретикулярной плотности, т. е. грани с наиболее густым расположением частиц, причем развитие таких граней находится в прямой зависимости от того количества гомологических точек, которое приходится на единицу площади данной кристаллической грани, мы, a priori, основываясь только на этом факте и на теории структуры кристаллов, можем сделать некоторые очень важные выводы.

Представим себе опять какой-нибудь комплекс кристалла кубической сингонии гексаэдрической структуры, обладающего идеальной эластичностью. Если мы такой комплекс будем растягивать по одной из трех его четверных осей симметрии, то пространственная решетка данного кристаллического комплекса также будет подвергаться аналогичной гомогенной деформации растяжения.

Грань куба, перпендикулярная к той четверной оси симметрии, по которой производится гомогенная деформация положительного растяжения, в комплексе тетрагональной сингонии, полученном в результате такой деформации, будет иметь значение одной из граней пинакоида. Плотность сетки

этой грани останется той же самой, которой она обладала в изотропном комплексе, в то время, как плотности сеток всех других граней изменятся сравнительно с плотностями сеток тех граней изотропного комплекса, из которых они получены при помощи растяжения. В случае положительного растяжения, плотности сеток всех граней, исключая граней пинакоида, уменьшатся, сравнительно с теми плотностями, которыми они обладали в изотропном комплексе.

То же самое, конечно, относится и к поясу граней тетрагональных призм, плотности сеток которых будут уменьшаться по мере растяжения нашего идеально-эластичного изотропного комплекса. Вообще, расстояние между плоскими сетками пространственной решетки, соответствующими граням пинакоида, будет увеличиваться при гомогенной деформации растяжения, если, конечно, это растяжение будет иметь положительный знак.

В результате такого растяжения, мы, в конце концов, получим идеальный тетрагоналодиный комплекс, характеризующийся такой пространственной решеткой, в которой имеются плоские сетки, принадлежащие граням пинакоида совершенно особого значения. Это будут наиболее густые сетки рассматриваемой пространственной решетки, а, следовательно, грани пинакоида будут наиболее плотными гранями комплекса, так как на единицу площади такой грани будет приходиться гораздо больше частиц, или гомологических точек, чем на единицу площади в сетке другой грани. Если мы подвергнем тот же идеально-эластичный кубический комплекс гомогенной деформации прямого отрицательного растяжения, т. е. сжатия по четверной оси симметрии, то плотности сеток граней, перпендикулярных направлению деформации, останутся неизменными. Плотности сеток всех других граней будут увеличиваться по мере хода гомогенной деформации. Увеличение плотностей сеток граней, параллельных направлению отрицательного растяжения, будет в пространственной решетке выражаться сближением гомологических точек между собой по направлению той четверной оси симметрии, по которой происходит отрицательное растяжение.

Применяя совершенно такие же рассуждения для случаев получения идеальных тригоналоидных и гексагоналоидных комплексов из соответственных изотропных, мы приходим к совершенно аналогичным выводам. Идеальные комплексы, получающиеся в результате гомогенной деформации положительного растяжения изотропных, называются положительными идеальными комплексами, а выводящиеся путем отрицательного растяжения — отрицательными. В виду того, что из положительных и отрицательных идеальных комплексов могут быть выведены комплексы всех других сингоний на основании принципа минимума гомогенных деформаций, причем самый характер комплекса не изменяется, мы можем вообще говорить о положительных и отрицательных кристаллических комплексах, к какой бы сингонии они ни принадлежали.

Применяя закон наибольших плотностей сеток реальных граней кристалла, мы можем вывести общие условия роста кристаллов, являющихся представителями положительных и отрицательных комплексов. Если только на кристаллах преимущественно образуются и, главным образом, развиваются те грани, которые обладают наибольшими плотностями сеток, то на положительных кристаллах будут наиболее развиты грани, соответствующие граням пинакоида идеальных положительных комплексов, так как эти грани обладают наибольшими плотностями сеток. Грани всех других форм будут развиты гораздо слабее, чем эти особенно плотные грани.

Отсюда мы можем вывести некоторые общие положения относительно внешняго вида и свойств положительных и отрицательных кристаллов, причем эти положения подтверждаются обширным опытным материалом. Положительные кристаллы обладают особой гранью, в которой находится направление максимального натяжения. Это направление наиболее интенсивного роста; поэтому такие кристаллы характеризуются табличатым внешним видом. Вместе с тем, замечается превосходная спайность по граням, обладающим наибольшим натяжением, т. е. по граням пинакоида. По теории структуры кристаллов, это является следствием на-

именьшего расстояния между точками в направлении, параллельном этой грани.

В отрицательных кристаллах мы имеем целый пояс граней, соответствующий поясу призм идеальных комплексов, обладающих наибольшей плотностью сеток. В этом случае, мы можем вывести следующее общее положение, относящееся ко всем отрицательным кристаллическим комплексам различных сингоний: отрицательные кристаллы обладают одним особым направлением максимального натяжения. Это единственное направление наиболее интенсивного роста. Поэтому такие кристаллы характеризуются призматическим внешним видом.

Вместе с тем, плоскостями спайности являются некоторые грани, параллельные этому особому направлению наибольшего натяжения. С точки зрения строения кристаллов это является результатом наименьшего расстояния между точками в этом направлении.

Оба эти общие положения, касающиеся внешнего вида и свойств положительных и отрицательных кристаллов приложимы ко всем комплексам всех сингоний. Эти общие свойства положительных и отрицательных комплексов тем более резко выступают в каждом реальном случае, чем сильнее выражен положительный или отрицательный характер исследуемого кристаллического комплекса, т. е. чем значительнее величина растяжения того или другого знака, которому необходимо подвергнуть реальный комплекс для превращения его в идеальный. Таким образом, в каждом данном случае, мы всегда можем судить о том, будет ли интересующий нас комплекс положительным или отрицательным, а это дает нам возможность судить о внешнем облике кристалла по результатам его гониометрических измерений, хотя бы мы никогда и не видели реального кристалла. Такие суждения действительно и оправдываются на опыте.

11. СТАТИСТИЧЕСКИЙ МЕТОД И ПРАВИЛЬНАЯ УСТАНОВКА КРИСТАЛЛА.

На основании всех вышеизложенных принципов и законов кристаллизации мы производим правильную установку данного комплекса. Однако, для того, чтобы произвести такую правильную установку, нам необходимо дать себе полный отчет в комплексиальном значении каждой грани, наблюдавшейся на исследуемом кристалле. На основании закона Bravais мы можем принять, что те грани, которые обладают наибольшей плотностью сетки, будут постоянно появляться на кристаллах данного соединения и, в большинстве случаев, будут развиты гораздо сильнее тех граней, которые обладают сравнительно небольшой плотностью сетки. Если мы имеем достаточно большое число кристаллов одного и того же соединения, то иногда, в зависимости от каких-то совершенно неуловимых специальных причин, в растворе могут появляться на некоторых кристаллах совершенно исключительные грани, встречающиеся один или два раза, несмотря на то, что в нашем распоряжении имеются десятки, а иногда и сотни кристаллов. Понятно, что подобным непостоянным граням нельзя приписывать такого же значения, какое можно приписать тем граням, которые встречаются на кристаллах данного соединения постоянно. Только относительно постоянных граней можно с большей или меньшей достоверностью сказать, что это будут грани действительно большой комплексиальной важности, причем они будут иметь наибольшую плотность сеток. Таким образом, мы можем составить понятие о значении данной грани или целого комплекса граней, развитых на кристаллах того или другого соединения только после того, как мы вполне ясно представляем себе, насколько часто данная грань наблюдается на кристаллах исследуемого соединения. Этот вопрос может быть разрешен только статистическим методом. Мы должны пересмотреть возможно большее число кристаллов данного соединения и по этим наблюдениям составить себе понятие о тех гранях, которые встречаются наиболее часто. Это и будут, так называемые, комплексиальные грани, т. е. такие грани,

значение которых для характеристики данного вещества наиболее важно. Эти же грани будут обладать наибольшими плотностями сеток, по крайней мере в большинстве случаев. Эта закономерность особенно резко проявляется на сильно положительных кристаллах, обладающих одной единственной, наиболее плотной гранью. На таких кристаллах, обыкновенно развитых в виде табличек или пластинок, эта наиболее плотная грань и представляет собой поверхность почти всей таблички, причем остальные грани, обладающие гораздо меньшей плотностью сетки, обыкновенно развиты очень плохо и иногда в небольшом количестве. Если же они развиты в большем количестве, то по величине они настолько уступают одной основной наиболее плотной грани, что часто бывает трудно произвести измерение такого сильно положительного кристалла.

Почти то же самое можно сказать и относительно сильно отрицательных кристаллов, выделяющихся в виде иголочек или длинных призмочек, причем очень часто бывает, что концы этих иголочек совершенно не поддаются измерению, а грани призм, образующих такую иголку, вполне измеримы и иногда прекрасно развиты. Можно вообще сказать, что кристаллы с очень богатой комбинацией форм представляют собой довольно значительное затруднение в смысле их правильной установки. Благодаря этому, кристаллы многих минералов до сих пор еще с трудом поддаются правильной установке, так как очень часто в таких кристаллах развиты целые десятки граней, благодаря чему нахождение наиболее плотных граней среди множества плоскостей, развитых на кристалле, делается чрезвычайно затруднительным.

Выяснив путем статистического пересмотра комплексиальное значение кристаллических форм, мы можем приступить к правильной установке кристаллов данного соединения. Такая установка характеризуется тем, что, применяя совершенно определенные, известные условия, о которых более подробно будет сказано в следующей главе, каждый исследователь получит для кристаллов данного соединения совершенно одинаковую установку и те же характеризующие их константы, как и всякий другой. Вообще, можно сказать,

что только после выработки принципов правильной установки кристаллов может быть введено действительное однообразие в кристаллографическое описание веществ.

Из всего сказанного выше, мы можем вывести такое заключение: при своевременном состоянии кристаллографии, производя кристаллографическое исследование, совершенно недостаточно ограничиваться списком углов между гранями наблюдавшихся форм, как это делалось раньше, причем этим формам придавались совершенно произвольные символы; в настоящее время необходимо произвести гораздо более детальное кристаллографическое исследование каждого данного комплекса, необходимо выяснить комплексиальное значение каждой развивающейся на кристалле формы, что связано с правильной установкой кристалла. Для каждого данного случая необходимо определить относительные плотности сеток кристаллических граней, а также тот общий тип и ту структуру, к которым относится данный кристалл. Только в том случае, если кристаллографическое исследование дает нам в руки все данные для производства правильной установки, мы можем сказать, что такое исследование действительно удовлетворяет современным требованиям кристаллографии.

Во всех других случаях, когда из кристаллографического описания какого-нибудь вещества невозможно вывести его правильной установки, мы должны признать такое описание совершенно неудовлетворяющим современным требованиям. Такие исследования, если они произведены достаточно тщательно, могут служить только сырым материалом для сопоставления некоторых экспериментальных данных, заключающихся в подобных описаниях с более детальными и, если можно так выразиться, более рациональными исследованиями.

VIII. ПРАВИЛЬНАЯ УСТАНОВКА КРИСТАЛЛИЧЕСКОГО КОМПЛЕКСА.

1. ПРИНЦИПЫ ПРАВИЛЬНОЙ УСТАНОВКИ КРИСТАЛЛОВ.

В предыдущей главе уже было упомянуто о той цели, которую преследует действительно правильная установка кристалла. Как уже показывает само название, такая установка должна быть подчинена совершенно определенным правилам и условиям, руководствуясь которыми каждый исследователь должен получить для кристаллов данного вещества совершенно одинаковую установку. Только при условии подчинения установки кристаллов определенным правилам, применение которых допускает в каждом данном случае единственное однозначное решение вопроса, возможно сделать результаты гониометрических исследований различных авторов вполне сравнимыми между собой, причем такое сравнение не будет представлять решительно никакого затруднения.

Все те правила, на основании которых производится установка кристаллов, при условии однозначного решения вопроса, в каждом данном случае, должны быть выведены из совершенно определенных, вполне установленных закономерностей, имеющих смысл общих законов кристаллизации. При соблюдении этого условия, установка кристалла будет не только правильной, но и рациональной. В самом деле, мы можем представить себе вполне систематически выработанный ряд правил, на основании которых мы и будем производить „правильную“ установку кристаллов. Если такие правила подобраны достаточно умело, то, в случае их применения, действительно может быть вполне устранен тот произвол, который до сих пор царил в установке кристаллов. Однако, несмотря на устранение произвола и подчинение установки определенным правилам, мы все-таки еще не можем сказать, что такая установка будет действительно рациональной, если только те принципы, на основании кото-

рых выработаны правила этой установки, являются совершенно случайными, не имеющими прочной базы в тех общих закономерностях, которые управляют образованием и ростом кристаллических многогранников.

В предыдущей главе уже были указаны те общие принципы, на которых может быть основана правильная и вполне рациональная установка кристаллов. Эти принципы опираются на два, вполне точно установленных, общих закона кристаллизации:

1) закон наибольших плотностей сеток граней, развивающихся на реальном кристаллическом многограннике форм, и

2) закон кристаллографических пределов.

Теперь нам остается рассмотреть, каким образом в каждом реальном случае мы можем наиболее рационально применять те вытекающие из общих законов кристаллизации следствия, которые дают нам возможность вывести основные правила рациональной установки кристаллов. Применение таких правил должно быть обставлено соответственными условиями, допускающими в каждом данном случае одно единственное, однозначное решение вопроса. Для этого, прежде всего, нам необходимо более детально ознакомиться с теми общими положениями и принципами, которые могут быть выведены из каждого общего закона кристаллизации в отдельности.

Обыкновенно, на практике, приложение тех принципов правильной установки, которые вытекают из двух известных нам общих законов кристаллизации, идет одновременно и параллельно. Принимая во внимание первый общий закон кристаллизации, или закон Bravais, мы можем сказать, что кристаллы вообще обладают почти исключительно гранями с наибольшими плотностями сеток. Благодаря этому, каждый исследователь, приступив к изучению кристаллов какого угодно соединения и получив в результате измерения кристаллических многогранников на гониометре диаграмму гномостереографических проекций граней кристалла, должен приписать наиболее важным комплексиальным граням такие символы, которые соответствуют комбинации форм с наибольшими плотностями сеток.

2. СЛЕДСТВИЯ ИЗ ЗАКОНА НАИБОЛЬШИХ ПЛОТНОСТЕЙ СЕТОК.

Как уже было упомянуто в предыдущей главе, закон наибольших плотностей сеток кристаллических граней имеет смысл и значение чисто эмпирического закона предельного характера. Благодаря этому, при обработке опытных данных, мы всегда можем встретить некоторые, хотя, правда, в громадном большинстве случаев сравнительно незначительные, уклонения от идеального развития форм в порядке наибольших плотностей сеток граней, имеющих важнейшее комплексиальное значение. Такие частичные уклонения в развитии форм указывают исключительно только на предельный характер закона наибольших плотностей сеток. Они не могут возбуждать никаких сомнений относительно общности этого закона кристаллизации, правильность которого установлена громадным фактическим материалом. В самом деле, закон наибольших плотностей сеток граней, развивающихся на кристаллическом многограннике форм, в случае правильной установки кристаллов исследуемого соединения, находит полное оправдание в применении к кристаллам всевозможных веществ. Принимая во внимание существование и правильность этого закона кристаллизации, мы получаем возможность вывести чрезвычайно важный общий критерий правильной установки кристаллов. Этот критерий можно формулировать таким образом: та установка будет наиболее правильной, при которой наиболее резко и ясно оправдывается закон наибольших плотностей сеток граней, развивающихся на кристаллическом многограннике. Другими словами, в случае правильной установки, наиболее резко выступает развитие форм кристаллического комплекса в порядке плотностей сеток граней, их характеризующих. Если мы имеем на кристаллическом многограннике ряд граней: a, b, c, d . . . n, то мы можем сказать, что в случае правильной установки такого кристалла при идеальном развитии его комплекса, плотности сеток граней реально наблюдавшихся форм будут наибольшими возможными для характеризующей его пространственной решетки.

Прежде всего, мы должны принять во внимание, что знание абсолютных величин плотностей сеток кристаллических граней не имеет существенного значения для применения закона Bravais. В самом деле, в случае практического решения вопроса относительно подчинения реально наблюдаемого кристаллического многогранника закону наибольших плотностей сеток, необходимо произвести сравнение плотностей сеток различных граней, принадлежащих одному и тому же кристаллическому комплексу. Для такого сравнения, являющегося необходимым при выяснении вопроса о большей или меньшей комплексиальной важности данной грани, а, следовательно, большей или меньшей возможности ее реального образования и развития, знание абсолютных величин плотностей сеток граней совершенно несущественно. Достаточно, для решения таких вопросов, иметь возможность определять относительные величины плотностей сеток различных граней, принадлежащих одному и тому же кристаллическому комплексу. Благодаря этому, мы всегда имеем возможность принять плотность сетки одной из граней кристаллического комплекса равной единице, и затем, пользуясь тем или другим методом нахождения плотностей сеток кристаллических граней, определить относительные значения плотностей сеток всевозможных граней данного комплекса.

Кроме того, необходимо иметь а виду, что плотность сетки кристаллической грани, вполне определяя ее комплексиальное значение, находится в непосредственной зависимости исключительно только от комплексиальной симметрии данного кристаллического вещества.

Рассматривая возможные виды комплексиальных симметрий, с точки зрения симметрии относящихся к ним кристаллических многогранников, мы видим, что не только плотности сеток граней одной и той же простой формы будут равны между собой, но также будут иметь совершенно одинаковую как абсолютную, так и относительную величину плотностей сеток две параллельные друг другу грани, хотя бы они и принадлежали различным кристаллическим формам.

3. ЦЕНА УСТАНОВКИ.

Принимая во внимание изложенное выше, возвратимся к рассмотрению кристаллического многогранника с развитыми на нем гранями *a*, *b*, *c*, *d* . . . *n*, являющегося представителем одного из возможных кристаллических комплексов.

Допустим сначала, что грани *a*, *b*, *c* . . . *n* не только принадлежат различным кристаллическим формам, но также обладают различными плотностями сеток.

Назовем плотности сеток граней рассматриваемого нами кристаллического комплекса p_1, p_2, p_3, . . . p_n, причем p_1 — плотность сетки грани *a*; p_2 — плотность сетки грани *b*; p_3 — плотность сетки грани *c* и т. д. Если мы имеем идеальный порядок развития граней по плотностям их сеток, то $p_1 > p_2 > p_3 > \ldots p_n$. Если наши величины выражают плотности сеток граней не в абсолютном значении, а только в относительном то, при идеальном развитии форм кристалла в порядке плотностей сеток граней, мы имеем возможность утверждать, что p_1 есть наибольшая возможная для данного кристаллического комплекса при данной установке, относительная плотность сетки; p_2 — наибольшая после p_1; p_3 — наибольшая после p_2 и т. д. При реальном осуществлении таких условий мы имеем идеальное развитие комплекса в порядке наибольших плотностей сеток кристаллических граней. Однако, в реально наблюдаемых случаях, такое идеальное развитие комплекса далеко не всегда осуществляется. Очень часто мы имеем различные нарушения в порядке развития кристаллических форм по наибольшим плотностям сеток их граней. Может случиться, что комплекс кристалла, характеризующийся упомянутым выше идеальным порядком граней по их плотностям сеток, реально осуществляется в виде кристалла, на котором развиваются грани *a*, *c*, *d* и т. д., а некоторые грани, промежуточные по своим плотностям сеток, как например, грань *b* по плотности сетки, находящаяся между гранями *a* и *c*, совершенно никогда не наблюдаются.

Если мы имеем какой-нибудь реальный кристалл с развитыми на нем гранями в количестве *n*, причем идеальный

порядок в развитии форм по плотностям сеток граней отчасти нарушен, то понятно, что сумма плотностей сеток всех наблюдавшихся граней, при таком нарушенном порядке, будет меньше суммы плотностей сеток того же количества граней, но в идеальном порядке развития форм по их плотностям сеток. Обозначим сумму плотностей сеток реально наблюдавшихся граней через R. Так как, по приведенному выше условию, на реально наблюдавшемся кристаллическом комплексе было развито всего n граней, то, в случае идеального развития этого комплекса в порядке плотностей сеток граней и при условии того же их количества n, мы получили бы другую сумму, которую мы действительно и можем всегда найти, сложив плотности сеток граней данного кристаллического комплекса в количестве n и в идеальном порядке их плотностей сеток. Назовем эту вторую сумму плотностей сеток граней при идеальном развитии комплекса J. Ясно, что отношение $\frac{R}{J}$ будет или равно единице, или меньше единицы. Это отношение и дает нам алгебраическое выражение критерия правильной установки кристалла, основанного на законе наибольших плотностей сеток граней, развивающихся на кристаллическом многограннике. Чем менее $\frac{R}{J}$ отличается от единицы, тем больше мы имеем уверенности в правильности данной нами установки кристаллов. Имея в виду предельный характер закона Bravais, мы, вообще, можем сказать, что отношение $\frac{R}{J} = 1$ встречается далеко не часто. В общем случае, это отношение будет всегда меньше единицы, причем такое отклонение от единицы, вообще, будет незначительным. В большинстве случаев, произведя правильную установку, мы имеем для такого выражения критерия правильной установки 0,9 — 0,8 и, только в редких случаях, меньше 0,8. Отношение $\frac{R}{J}$, представляющее выражение общего главного критерия правильной установки, основанного на законе наибольших плотностей сеток граней, развивающихся на реально наблюдавшемся кристаллическом многограннике, мы будем называть „ценой установки“ — V.

При выводе этого критерия правильной установки, мы предположили, что каждая реально наблюдавшаяся грань кристалла имеет особую плотность сетки, отличающуюся от плотностей сеток всех других граней. Принимая во внимамание то, что было сказано относительно равенства плотностей сеток одной и той простой формы, а также относительно равенства плотностей сеток двух, параллельных между собой, граней, мы можем сказать, что рассматриваемый нами случай относится к комплексу триклинной сингонии, причем реально наблюдавшийся кристаллический многогранник обладает гемипинакоидальным видом симметрии, т. е. характеризуется полным отсутствием элементов симметрии. Если же принять во внимание, что для образования и развития данной грани кристалла, согласно закону наибольших плотностей сеток, имеет значение исключительно только комплексиальная симметрия кристаллического многогранника, то станет вполне очевидным, что уже образование реально наблюдаемого кристалла в виде многогранника гемипинакоидального вида симметрии, может считаться отступлением от идеального развития в порядке наибольших плотностей сеток граней, т. е. частичным нарушением закона Bravais.

С другой стороны, образование и развитие комплексиально важной грани, хотя бы в единственном числе, указывает на осуществление того же закона относительно определенной плоской сетки пространственной решетки, характеризующейся некоторой плотностью. Чтобы выйти из этого противоречия, можно считать появление хотя бы одной грани какой-нибудь формы вполне идентичным развитию всех граней той же формы, выводящихся из одной, благодаря присутствию элементов комплексиальной симметрии, присущей данному кристаллическому комплексу.

Вводя такое условие, мы можем определять R и J, считая каждые две параллельные грани за одну. В вышеприведенном алгебраическом выражении цены установки такое допущение приведет к полному тождеству, так как мы получим вместо $\frac{R}{J}$ совершенно тождественное выражение $\frac{2R}{2J}$.

В виду того, что различные кристаллические формы обладают разным количеством граней, мы не можем ввести подобного упрощения для вычисления *R* и *J*, основываясь на одинаковой величине плотностей сеток граней одной и той же формы. Таким образом, при нахождении *R* и *J* достаточно подсчитать сумму плотностей сеток всех граней в реальном и идеальном порядке развития форм по плотностям сеток, принимая каждую пару параллельных граней за одну.

Из закона наибольших плотностей сеток, реально наблюдаемых кристаллических граней, мы можем вывести второй критерий, не имеющий такого общего значения, как выведенный раньше, но играющий важную роль в некоторых частных случаях. Применение этого второго критерия имеет особенную важность в случае крайне положительных комплексов, представляющих наибольшие затруднения для правильной установки, благодаря своим специфическим свойствам. Как мы уже видели в предыдущей главе, такие сильно положительные кристаллические комплексы характеризуются преобладающим, выдающимся развитием одной определенной формы, соответствующей пинакоиду идеальных комплексов. Такое выдающееся развитие этой особой формы обусловливается громадной относительной величиной плотностей сеток, образующих ее граней. В случае крайне положительных комплексов, плотности сеток всех других граней очень невелики и, так сказать, совершенно стушевываются сравнительно с величиной плотностей сеток граней такой особой формы.

О тех специальных затруднениях, которые возникают при установке таких, крайне положительных, комплексов, обладающих пинакоидом чрезвычайно большой относительной плотности, можно сказать следующее.

Как из наблюдаемых фактов, так и из теоретических соображений легко усмотреть, что плотность этого особого, пластинчатого пинакоида так громадна, по сравнению со всеми гранями остальных форм, что, несмотря на чрезвычайные колебания в составе этой комбинации, цена установки всегда так близка к 1-це, как это, вообще, не замечается для кристаллических комплексов с другими свойствами.

Ничто так рельефно не подчеркивает совершенства применяемого теперь критерия, то-есть его соответствия самой природе кристаллических веществ, как именно применение его к крайним, а особенно экстракрайним положительным кристаллическим комплексам.

Это применение показывает, что расчеты порядка граней по плотности сеток становятся неопределенными потому, что само различие в плотностях граней разных символов делается исчезающим по своей ничтожности, особенно по сравнению с громадностью этой величины для пинакоида пластинчатости. И эта неопределенность не есть недостаток в математическом выражении цены установки, но, именно, вполне соответствует свойствам самих кристаллов, так как тот же всеобщий опыт показывает, как особую характеристику таких кристаллов, полную неустойчивость всех остальных форм, кроме пинакоида пластинчатости. Можно сказать, что в таких крайних комплексах, как общий случай, все остальные грани, кроме этого пинакоида, представляют систему узких полосок в осцилляторном сочетании, и почти невозможно с уверенностью констатировать именно те или другие формы, и при разных измерениях и у разных авторов получаются различные формы.

Если же значение всех остальных форм, по сравнению с пинакоидом пластинчатости, почти исчезает в расчете, то нарушается сам принцип, на котором расчет основывается, а именно принцип статистической оценки всей вообще комбинации.

Если мы имеем крайне положительный кристаллический комплекс, причем развитие форм такого комплекса не является идеальным, то очень часто, увеличивая предполагаемое растяжение комплекса по особой оси, мы можем придти к большей величине отношения $\frac{R}{J}$. Однако, такое увеличение значения общего критерия будет связано не только с уменьшением плотностей сеток всех других граней, кроме двух наиболее плотных параллельных между собой граней, но кроме того, почти для всех остальных форм, развитых на кристалле, все более и более будет нарушаться

идеальный порядок в развитии граней по плотностям их сеток.

Ясно, что такая установка, несмотря на увеличение абсолютного значения общего критерия, будет давать большее отступление от закона Bravais, чем та установка, для которой абсолютная величина общего критерия будет меньше, но порядок развития форм комплекса будет ближе к идеальному, чем для второй установки, дающей большую величину абсолютного значения общего критерия правильной установки.

В этом исключительном разряде случаев приходится изменить порядок расчета, что можно осуществить тем, что в расчет вводить все остальные формы (по статистической важности), кроме особого пинакоида.

Конечно, тогда мы получим, вообще, несоразмерно малую величину цены установки, но уже это обстоятельство теряет свое значение, так как расчет вместе с пинакоидом уже дал для цены установки очень большую величину; остается для разных установок только рассмотреть, в пользу какой из них склоняется получаемый расчет, и постараться эгу разницу выразить рельефнее.

Таким образом, этот дополнительный критерий, относящийся к случаю положительных кристаллических комплексов, может быть представлен в таком виде: в суммах R и J мы отбрасываем величину, соответствующую плотности сетки грани особого пинакоида положительного комплекса.

Вместо R и J получаем соответственно R_1 и J_1. Отношение $\frac{R_1}{J_1}$ и будет алгебраическим выражением дополнительного критерия правильной установки, основанного на законе наибольших плотностей сеток и применяющегося в некоторых случаях для крайне положительных кристаллических комплексов.

Аналогичный дополнительный критерий может быть выведен и для отрицательных кристаллических комплексов.

В самом деле, и здесь мы получаем в пределе, для всех граней вертикальной призмы, подавляюще громадные величины плотности, перед которыми все остальные можно было

бы практически принимать за нуль и, таким образом, в пределе правильная установка стала бы совершенно неопределенной. Но здесь всегда она станет определенной (если отвлечься от частных особых случаев), если в расчете мы устраним все числа, относящиеся к вертикальным призмам.

На деле число иных граней, кроме призматического пояса, сводится к минимуму, и именно для ультраотрицательных кристаллов таковых или вовсе не имеется, или же мы имеем одну единственную притупляющую форму, и даже далеко не для одних ультраотрицательных комплексов.

Кроме того, нужно заметить, что если посреди ультраположительных мы имеем еще значительное количество кристаллов с главным определяющим числом, (значение которого будет выяснено дальше) большим, чем 80^0, то таких отрицательных кристаллов, в которых это число меньше 10^0, мы почти вовсе не имеем (попадаются единичные исключения).

Для того, чтобы иметь возможность применять на практике упомянутые выше критерии правильной установки, выводящиеся из первого общего закона кристаллизации, необходимо всякий раз, для каждого данного кристаллического комплекса, определять относительные плотности сеток различных граней.

4. СЛЕДСТВИЯ ИЗ ЗАКОНА КРИСТАЛЛОГРАФИЧЕСКИХ ПРЕДЕЛОВ.

Кроме закона наибольших плотностей сеток граней, развитых на кристаллах исследуемого соединения, в каждом данном случае надо непременно применять те выводы, которые получаются из второго общего закона кристаллизации, а именно из закона кристаллографических пределов. Перейдем теперь к рассмотрению тех общих выводов, которые можно сделать из второго закона кристаллизации. Закон кристаллографических пределов, утверждающий всеобщую псевдотетрагональность или псевдогексагональность всех кристаллов, указывает на то, что каждый реально существующий кристаллический многогранник должен непременно об-

ладать особым поясом граней, сравнительно очень мало отличающимся от изотропного пояса, характеризующего идеальный тетрагоналоидный или гексагоналоидный комплексы. Такой псевдоизотропный пояс или действительно наблюдается на исследуемом кристалле, или является возможным главным поясом призм данного кристаллического комплекса.

Благодаря этому, получив, в результате гониометрического исследования кристаллов какого-нибудь соединения, диаграмму гномостереографических проекций наблюдавшихся граней, мы, прежде всего, должны, следовательно, отыскать такой особый пояс граней, который соответствует поясу тетрагональных или гексагональных призм, т. е. тот пояс, в котором углы между главнейшими его гранями возможно мало отличаются от 45^0 в случае тетрагоналоидных кристаллов и от 60^0 в случае кристаллов тригоналоидных и гексагоналоидных.

Остановимся теперь на вопросе о том, какая характеристика данного кристаллического комплекса будет наиболее удобной и рациональной с точки зрения закона кристаллографических пределов. Такая характеристика кристаллического комплекса должна заключать в себе столько данных, сколько необходимо иметь для возможности полного и точного воспроизведения комплекса. Кроме того, все эти данные должны непосредственно указывать, насколько исследуемый реальный кристаллический комплекс подчиняется закону кристаллографических пределов.

Для того, чтобы воспроизвести комплекс какого-нибудь реально наблюдавшегося кристалла в проекции, при обычном методе описания результатов измерения, необходимо пользоваться тремя различными группами данных. Такими данными служат: величины отношений единичных отрезков по трем кристаллографическим осям и углы между этими последними, если только они не равны 90^0 — это составляет первую группу данных. Второй группой таких данных является таблица углов между перпендикулярами к некоторым граням различных форм, наблюдавшихся на кристалле. Третья группа данных заключает в себе список форм, наблюдавшихся на кристаллах исследуемого вещества.

Две первые группы таких данных находятся в самой тесной связи друг с другом, так как каждая из них может быть вполне точно и определенно выведена из другой; третья группа данных независима от двух первых и представляет собою необходимое дополнение для характеристики реально наблюдавшегося кристаллического многогранника. В виду того, что при выводе первой группы данных, каждый исследователь действовал не на основании каких-нибудь общих правил, а, главным образом, только имея в виду некоторые условности, выработанные кристаллографической практикой и не имеющие ничего общего с принципами правильной установки, очень часто случалось, что при описании кристаллов одного и того же вещества (или двух полных изоморфов) разными авторами давались совершенно различные установки. Благодаря этому, первая группа данных являлась чем то совершенно неопределенным, зависящим, почти исключительно, только от произвола исследователя.

Такое полное отсутствие определенности часто приводило к чрезвычайно большим затруднениям при сравнении результатов кристаллографических исследований различных авторов, причем иногда кристаллы одного и того же вещества, описанные разными авторами, принимались за различные, не имеющие между собой ничего общего. Обыкновенно, при таких описаниях кристаллографических исследований, случаи изоморфизма (в особенности эквивалентного) часто не могли быть констатированы и оставались совершенно неизвестными.

Кроме того, при определении единичных отрезков по кристаллографическим осям и углов между ними реальное осуществление общего положения, вытекающего из закона кристаллографических пределов, являлось совершенно не выясненным, благодаря, в некоторых случаях, полному несоответствию первой группы данных с принципом минимума гомогенных деформаций.

Такое несоответствие особенно бросается в глаза в случае тригоналоидных комплексов, где направления и плоскости гомогенных деформаций имеют косое положение по отношению к кристаллографическим осям.

Благодаря всему только что сказанному, являлось в высшей степени важным установить новую общую характеристику кристаллического комплекса, основанную на общих положениях, вытекающих из закона кристаллографических пределов. Такая характеристика была предложена проф. Е. С. Федоровым и названа им символом комплекса.

5. СИМВОЛЫ КОМПЛЕКСОВ.

Для того, чтобы получить символ комплекса, в данном реальном случае, следует припомнить то, что было сказано в предыдущей главе относительно возможности вывода комплекса кристалла какой угодно сингонии из соответствующего идеального, при помощи определенных гомогенных деформаций сравнительно очень небольшой величины.

Мы знаем, что идеальные кристаллические комплексы могуть обладать тремя различными видами комплексиальной симметрии. Тетрагоналоидные идеальные комплексы обладают дитетрагонально-дипирамидальным видом комплексиальной симметрии, причем реальными представителями этих идеальных комплексов служат кристаллы тетрагональной сингонии. Идеальные тригоналоидные комплексы обладают дитригонально-скаленоэдрическим видом комплексиальной симметрии, причем реальными представителями таких комплексов являются некоторые кристаллы тригональной гипосингонии. Наконец, идеальными гексагоналоидными комплексами являются те, которые обладают дигексагонально-дипирамидальным видом комплексиальной симметрии, а реальными представителями таких комплексов служат кристаллы гексагональной сингонии, обладающие призматической структурой. Идеальные тетрагоналоидные и тригоналоидные кристаллические комплексы принадлежат к кубическому типу строения, причем главной осью комплексиальной симметрии для идеальных тетрагоналоидных комплексов служит четверная, а для идеальных тригоналоидных — тройная ось симметрии. Идеальные гексагоналоидные комплексы характеризуются особой главной шестерной осью комплексиальной симметрии.

Эти главные, особые оси комплексиальной симметрии, характеризующие каждый идеальный комплекс, отмечаются в символе комплекса цифрой, соответствующей их наименованию. Так как, согласно закона кристаллографических пределов и принципа минимума гомогенных деформаций, все кристаллические комплексы сравнительно немного отличаются от соответствующих им идеальных, можно сохранить такое обозначение характера данного комплекса решительно во всех случаях, будет ли это комплекс ромбической, моноклинной или триклинной сингонии. Таким образом, в символе комплекса мы будем отмечать все тетрагоналоидные комплексы цифрой 4, тригоналоидные — цифрой 3, а гексагоналоидные — цифрой 6, соответственно имеющимся в данных комплексах осям или псевдоосям комплексиальной симметрии. В виду того, что для тетрагоналоидных и тригоналоидных кристаллических комплексов, принадлежащих к кубическому типу строения, возможны три различные структуры, мы должны отметить структуру данного комплекса, поставив рядом с цифрой, обозначающей его принадлежность к тетрагоналоидным или тригоналоидным комплексам, определенную букву, отмечающую структуру исследуемого комплекса. Для отметки структуры применяются начальные буквы названий структур, т. е. гексаэдрическая структура отмечается буквой *h*, октаэдрическая — буквой *o* и додекаэдрическая — буквой *d*. Отметка структуры для гексагоналоидных комплексов является излишней, в виду того, что все они обладают единственной возможной для них структурой — призматической.

Остановимся прежде всего на определении символов идеальных тетрагоналоидных и тригоналоидных кристаллических комплексов. Все реальные представители этих идеальных комплексов могут быть расположены в два ряда, причем каждый такой ряд будет содержать в себе все относящиеся к нему кристаллические комплексы. На двух противоположных концах таких рядов расположатся с одной стороны экстраположительные, а с другой стороны экстраотрицательные кристаллические комплексы. Как раз по средине между такими экстракрайними комплексами должен быть помещен один и тот же особый кристаллический комплекс, общий

обоим рядам и представляющий собою случай отсутствия знака кристаллического комплекса или, другими словами, представляющий тот кристаллический комплекс, который не является ни положительным, ни отрицательным, причем он в одно и то же время будет как тетрагоналоидным, так и тригоналоидным. Реальные представители такого комплекса нам хорошо известны — это кристаллы кубической сингонии, а сам комплекс — кубически-изотропный.

В самом деле, как мы уже видели, из этого изотропного комплекса могут быть выведены, путем одной единственной гомогенной деформации прямого растяжения, всевозможные тетрагоналоидные и тригоналоидные идеальные комплексы. Для получения идеального тетрагоналоидного комплекса из кубически-изотропного, нам достаточно сделать прямое растяжение по оси [001] изотропного комплекса, а для получения идеального тригоналоидного — растяжение по оси [111] того же комплекса. Эти соотношения могут быть выражены в символе комплекса, если мы примем угол (001) : (111) за главную характеристику комплексов кубического типа строения. Таким образом, угол между перпендикулярами к граням (111) и (001) может быть признан вполне рациональной и достаточной характеристикой для всех тетрагоналоидных и тригоналоидных идеальных комплексов. Величина этого угла должна быть указана в символе комплекса, причем это и есть главное определяющее число всех символов комплексов кубического типа строения. Обозначив это число буквой α, а отметку структуры данного комплекса — буквой s, мы получим следующее общее выражение символа для всех идеальных тетрагоналоидных комплексов:

$\frac{4s}{\alpha}$, а для идеальных тригоналоидных $\frac{3s}{\alpha}$

Совершенно аналогично, для гексагоналоидных комплексов мы можем принять за главное определяющее число символа величину угла между перпендикулярами к граням (1000) и (1110). Называя эту величину буквой α, мы получаем следующее общее выражение для символов идеальных гексагоналоидных комплексов: $\frac{6}{\alpha}$

Сопоставляя все сказанное выше, мы можем составить следующую табличку, дающую общее выражение символов всех идеальных комплексов:

Названия и символы идеальных комплексов.

Величины главного числа α символа комплекса.	Тетрагоналоидные $\frac{4s}{\alpha}$ Тригоналоидные $\frac{3s}{\alpha}$	Гексагоналоидные $\frac{6}{\alpha}$
$\alpha < 49^0 6'$	отрицательные	отрицательные
$\alpha = 49^0 6'$	отрицательный	изотропный
$49^0 6' < \alpha < 54^0 44'$	отрицательные	положительные
$\alpha = 54^0 44'$	изотропный	положительные
$\alpha > 54^0 44'$	положительные	положительные

6. МОДАЛЬНОСТИ КОМПЛЕКСОВ.

Имея в виду то, что было сказано выше о возможности вывода каких угодно кристаллических комплексов, относящихся к различным сингониям, из идеальных, при помощи гомогенных деформаций минимального значения, производимых совершенно определенным, закономерным порядком, сделаем здесь общий систематический вывод возможных случаев применения таких гомогенных деформаций, из которых каждая определяет особый вид кристаллического комплекса или, так называемую, особую кристаллографическую модальность. В дальнейшем изложении мы будем каждый раз останавливаться на более детальном рассмотрении общих свойств того идеального комплекса, из которого могут быть получены различные модальности низших сингоний, при помощи определенных гомогенных деформаций.

7. МОДАЛЬНОСТИ ТЕТРАГОНАЛОИДНЫХ КОМПЛЕКСОВ РОМБИЧЕСКОЙ СИНГОНИИ.

Комплекс кристалла тетрагональной сингонии, т. е. идеальный тетрагоналоидный кристаллический комплекс характеризуется четверной осью комплексиальной симметрии. Эта четверная ось симметрии принимается за третью кристаллографическую ось, а пояс граней, параллельных этой особой оси, является, в общем случае, единственным изотропным поясом идеального тетрагоналоидного комплекса. Первая и вторая кристаллографические оси идеального тетрагоналоидного комплекса, перпендикулярные к граням (100) и (010), являются, в то же время, двумя из четырех двойных осей комплексиальной симметрии, расположенных в плоскости, перпендикулярной четверной оси симметрии. Угловое расстояние между двумя смежными двойными осями симметрии идеального тетрагоналоидного комплекса равно 45^0. Следовательно, попарно через одну, такие двойные оси комплексиальной симметрии образуют между собой прямые углы. Одна пара таких двойных осей симметрии совпадает, как было только что сказано, с первой и второй кристаллографической осью и перпендикулярна граням (100) и (010), в то время, как другая пара таких прямоугольных двойных осей симметрии перпендикулярна граням (110) и ($1\bar{1}0$). Так как формы {100} и {110} имеют совершенно различное комплексиальное значение, то точно так же совершенно различного значения будут и две двойные оси симметрии, образующие между собой угол в 45^0.

Как мы видели в предыдущей главе, для получения комплекса ромбической сингонии из тетрагоналоидного идеального, нам совершенно достаточно произвести в тетрагоналоидном идеальном комплексе гомогенную деформацию растяжения по одной из четырех его двойных осей симметрии. Такое растяжение, вообще, может быть какого угодно знака и какой угодно величины, но на основании принципа минимума гомогенных деформаций, вытекающего из закона кристаллографических пределов, мы знаем, что такое растяже-

ние должно быть, по возможности, малым. Так как в тетрагоналоидном идеальном комплексе каждая из двух двойных осей симметрии, образующих пару прямоугольных, имеет совершенно одинаковое значение, то безразлично по которой из таких двух осей мы будем производить гомогенную деформацию растяжения, переводящую идеальный тетрагоналоидный комплекс в ромбический. Кроме того заметим, что, вообще, мы можем сделать деформацию растяжения двух различных знаков, т. е. мы можем произвести растяжение положительное, или собственно-растяжение, по одной из этих двух равнозначных двойных осей симметрии или растяжение отрицательное, т. е. другими словами, сжатие по той же оси симметрии. Между такими деформациями будет существовать определенное соотношение. Это соотношение может быть выражено следующим образом: если при помощи гомогенной деформации положительного растяжения по оси [100] некоторого комплекса получается данный комплекс ромбической сингонии, то тот же самый комплекс может быть получен и при помощи гомогенной деформации отрицательного растяжения по оси [010] некоторого другого идеального тетрагоналоидного комплекса. Благодаря существованию такого соотношения, в случае превращения идеального тетрагоналоидного комплекса в ромбический, путем растяжения по одной из двух кристаллографических осей, мы можем всегда рассматривать такое превращение, как результат положительного растяжения идеального тетрагоналоидного комплекса по оси [100], причем плоскостью такого растяжения будет служить плоскость, проходящая через четверную [001] и двойную [010] оси симметрии идеального тетрагоналоидного комплекса. Кристаллические комплексы, полученные таким путем, мы будем называть модальностями первого рода ромбической сингонии.

Так как в тетрагоналоидных идеальных комплексах кроме двух взаимно-перпендикулярных двойных осей симметрии [100] и [010] существуют, как было упомянуто выше, еще две, также взаимно перпендикулярных, оси симметрии [110] и [1$\bar{1}$0], то, принимая во внимание, что в случае растяжения идеального тетрагоналоидного комплекса по какой угод-

но двойной оси симметрии, имеющейся в нем, получается всегда ромбический комплекс, мы можем, следовательно, вывести комплекс кристалла ромбической сингонии, производя растяжение идеального тетрагоналоидного комплекса по одной из тех двух его двойных осей симметрии, которые перпендикулярны граням (110) и ($1\bar{1}0$).

Ромбические комплексы, выводящиеся из идеальных тетрагоналоидных таким путем, относятся к модальности второго рода. В случае модальности второго рода, мы можем ввести то же условие, которое было принято для модальности первого рода и рассматривать все комплексы, относящиеся к модальности второго рода, как результат положительного растяжения идеальных тетрагоналоидных комплексов по оси [110].

Принимая такие условия, мы во всех случаях будем иметь совершенно определенный путь для перехода от тетрагоналоидных идеальных комплексов к ромбическим:

1) положительное растяжение по оси [100] для модальностей первого рода и

2) положительное растяжение по оси [110] для модальностей второго рода.

Из только что сказанного вполне выясняется общее различие модальностей первого и второго рода. Главное различие этих двух модальностей состоит в том, что в случае модальности первого рода, три двойные оси симметрии ромбического комплекса получают символы [001], [100] и [010], что вполне соответствует обычно принятой установке кристаллов, в то время как модальность второго рода характеризуется символами двойных осей комплексиальной симметрии [001], [110] и [$1\bar{1}0$]. Другими словами, в случае модальности первого рода ромбического комплекса, мы имеем угол (100) :(010) = 90°. В случае модальности второго рода того же комплекса, мы имеем угол между гранями (110) и ($1\bar{1}0$) равным 90°. В виду того, что оси [100] в случае модальности первого рода и [110] в случае модальности второго рода являются осями положительного растяжениями, углы между перпендикулярами к граням (110) и ($1\bar{1}0$) в случае модаль-

ности первого рода будут больше 90^0; точно так же, в случае модальности второго рода, будут больше 90^0 углы между перпендикулярами к (100) и (010).

Этими двумя модальностями, т. е. одной модальностью первого рода и одной модальностью второго рода исчерпываются все виды модальностей, возможные для тетрагоналоидных комплексов ромбической сингонии.

Перейдем к определению символов тетрагоналоидных комплексов ромбической сингонии. В символе комплекса тетрагоналоидного ромбического кристалла, определяющегося двумя геометрическими константами, необходимо иметь две, независимые друг от друга, величины, которые могли бы вполне точно определить весь комплекс данного ромбического кристалла. Одна из таких величин нам уже известна, так как она вполне аналогична той величине, которая характеризует символ комплекса идеального тетрагоналоидного кристалла и называется главным числом этого символа. Это главное число — угол между перпендикулярами к граням (001) и (111). Вторая величина, входящая в символ комплекса ромбического кристалла, дает величину отклонения данного ромбического комплекса от соответствующего ему идеального и носит название величины отклонения угла главной призмы.

Значение этого угла отклонения делается совершенно ясным из следующих общих соображений. Как было сказано выше, каждый идеальный тетрагоналоидный комплекс обладает одним изотропным поясом, который может быть назван поясом тетрагональных и дитетрагональных призм. После превращения такого идеального комплекса в ромбический, пояс тетрагональных призм переходит в один из поясов ромбических призм, причем этот пояс из изотропного превращается в ортогональный.

Зона тетрагональных призм идеального тетрагоналоидного комплекса имеет две главные тетрагональные призмы {100} и {110}. В случае ромбических комплексов, относящихся к модальности первого рода, тетрагональная призма {100} идеального комплекса переходит в комбинацию двух пинакоидов {100} и {010}. Тетрагональная призма {110} идеального комплекса превращается в ромбическую призму ромбиче-

ского комплекса, причем угловое расстояние граней этой призмы будет отличаться от угловых расстояний между гранями тетрагональной призмы {110} идеального комплекса. В идеальном тетрагоналоидном комплексе углы между гранями тетрагональных призм в точности равны 90^0.

Углы между гранями ромбической призмы {110}, образующейся после гомогенной деформации растяжения по двойной оси симметрии [100] идеального тетрагоналоидного комплекса уже не равны 90^0. Эти углы тем более будут отличаться от 90^0, чем больше была величина гомогенной деформации, переводящей идеальный тетрагоналоидный комплекс в ромбический. Обозначим угол между перпендикулярами к граням (110) и ($1\bar{1}0$) ромбического тетрагоналоидного комплекса через A. Угол отклонения главной призмы может быть выражен разностью $A - 90^0 = 2\varphi$ в случае ромбического комплекса, относящегося к модальности первого рода. В символе комплекса величина угла φ ставится под величиной главного числа.

Для ромбических комплексов, относящихся к модальности второго рода, мы можем принять совершенно аналогичный символ, причем угол A здесь относится к углу между гранями (100) и (010), а принадлежность комплекса к модальности второго рода отмечается знаком —, поставленным перед величиной угла φ. Таким образом, для ромбических тетрагоналоидных комплексов мы имеем, соответственно возможным для них двум модальностям, следующие два вида символов комплексов:

$$\begin{matrix} 4s \\ \alpha \\ \varphi \end{matrix} \quad \text{и} \quad \begin{matrix} 4s \\ \alpha \\ -\varphi \end{matrix}$$

8. МОДАЛЬНОСТИ ТЕТРАГОНАЛОИДНЫХ КОМПЛЕКСОВ МОНОКЛИННОЙ СИНГОНИИ.

Перейдем теперь к рассмотрению тех модальностей, которые возможны для кристаллических комплексов моноклинной сингонии. На основании закона кристаллографи-

ческих пределов мы можем сказать, что все моноклинные комплексы будут всегда псевдоромбическими, т. е. такими, которые весьма мало отличаются от комплексов ромбической сингонии. Как уже было выяснено раньше, переход от ромбических комплексов к моноклинным может быть осуществлен при помощи сдвига совершенно определенного положения и значения. Этот сдвиг носит название моноклинного. Плоскостью для такого моноклинного сдвига служит одна из трех плоскостей симметрии ромбических комплексов, причем направление сдвига всегда лежит также в одной из трех плоскостей симметрии этих комплексов. Принимая во внимание, что на основании закона кристаллографических пределов все тетрагоналоидные ромбические комплексы постоянно являются псевдотетрагональными, т. е. обладающими псевдо-четверной осью симметрии, причем через такую ось в ромбическом комплексе проходят две плоскости симметрии, мы можем различать две группы модальностей моноклинных комплексов. К первой группе модальностей таких комплексов мы относим те моноклинные комплексы, в которых псевдо-четверная ось симметрии ромбического комплекса служит двойной осью симметрии моноклинного комплекса, получающегося из ромбического посредством применения гомогенной деформации сдвига. В этом случае плоскостью моноклинного сдвига будет служить одна из двух плоскостей симметрии ромбического комплекса, проходящая через псевдо-четверную ось симметрии этого последнего. Приписав псевдо-четверной оси симметрии ромбического комплекса символ [001], мы, вообще, в первой группе модальностей можем различать два случая, в зависимости от того, будет ли подвергаться гомогенной деформации сдвига ромбический комплекс, относящийся к модальности первого рода или такой же комплекс, но относящийся к модальности второго рода. Рассмотрим оба эти случая отдельно.

Если ромбический комплекс, подвергаемый гомогенной деформации моноклинного сдвига, относится к модальности первого рода, то в таком комплексе мы имеем три прямых угла между гранями (001), (100) и (010), причем каждая из

этих граней параллельна плоскости комплексиальной симметрии.

Для преобразования такого комплекса в моноклинный мы должны применить такую гомогенную деформацию сдвига, при которой двойная ось симметрии преобразованного комплекса будет иметь символ [001]. Это условие будет выполнено, если принять за плоскость моноклинного сдвига плоскость симметрии ромбического комплекса, параллельную грани (100) или (010). Однако, которую бы из этих двух плоскостей мы ни приняли за плоскость моноклинного сдвига, мы после сдвига определенной величины и значения вообще получим один и тот же результат, причем модальности, полученные тем или иным путем совершенно не будут отличаться друг от друга. Благодаря этому, мы принимаем за плоскость моноклинного сдвига ту плоскость симметрии ромбического комплекса, в которой находятся перпендикуляры к граням (001) и (100). Производя такой моноклинный сдвиг, мы увидим, что углы между гранями (010) и (100) в полученном после гомогенной деформации сдвига моноклинном комплексе уже не будут равны 90^0, точно так же, как не будут равны 90^0 и углы между гранями (110) и ($1\bar{1}0$). Вводя в наши рассуждения принцип минимума гомогенных деформаций, мы можем сказать, что в данном случае углы между гранями (100) и (010) должны меньше отличаться от 90^0, чем углы между гранями (110) и ($1\bar{1}0$). Принимая [100] за ось положительного растяжения, совершенно аналогично случаю комплексов ромбической сингонии, и угол между перпендикулярами к граням (100) и (010) меньше 90^0 получаем следующее соотношение:

$$\angle (100):(010) < 90^0;$$

$$90^0 - \angle (100):(010) < 90^0 - \angle (110):(\bar{1}10),$$

где подразумеваются углы между перпендикулярами к граням. Эти соотношения характеризуют общее свойство пояса [001] моноклинного комплекса, принадлежащего к первой группе модальностей и представляющего собою модальность первого рода.

При получении моноклинного комплекса первой группы модальностей из ромбического комплекса, относящегося к модальности второго рода, мы принимаем за плоскость моноклинного сдвига ту плоскость симметрии ромбического комплекса, в которой находятся перпендикуляры к граням (001) и $(1\bar{1}0)$. В этом случае мы имеем следующее соотношение:

$$\angle (100):(010) > 90^0;$$

$$\angle (100):(010) - 90^0 > \angle (110):(1\bar{1}0) - 90^0;$$

$$\angle (100):(110) > \angle (010):(110);$$

$$\angle (110):(010) > \angle (\bar{1}10):(010).$$

Все эти соотношения, являясь более или менее условными, необходимы однако для того, чтобы при воспроизведении данного кристаллического комплекса по его символу в виде гномостереографических проекций его граней, мы могли бы всегда получить совершенно однообразные проекции, причем грани одинакового положения и значения получат при таких условиях постоянно одни и те же символы. При указаных выше соотношениях, для достижения той же цели, мы должны придерживаться некоторых правил для однообразного проектирования моноклинных комплексов. Правила эти следующие: в полюсе y (см. рис. 189) стереографической сетки мы постоянно помещаем граммастереографическую проекцию двойной оси симметрии данного моноклинного кристаллического комплекса, причем, по внешнему кругу сетки мы всегда располагаем граммастереографическую проекцию плоскости моноклинного сдвига. Придерживаясь таких правил, а также принимая во внимание те соотношения, о которых только что было сказано, мы всегда получим одинаковое изображение данного моноклинного комплекса в виде стереографических проекций элементов реально наблюдаемого кристаллического многогранника.

Вторая группа модальностей моноклинной сингонии может быть охарактеризована постоянной плоскостью моноклинного сдвига, за которую мы принимаем плоскость, проходящую через центр симметрии комплекса и перпендикулярную граням (100) и (010). В этой группе модальностей

моноклинной сингонии мы можем различать всего 4 модальности, из которых две относятся к модальностям первого рода, а две остальные — к модальностям второго рода. В первой модальности первого рода двойной осью симметрии моноклинного комплекса является ось [010]; во второй модальности первого рода той же двойной осью симметрии моноклинного комплекса служит ось [100]. Первая модальность второго рода моноклинного комплекса, относящегося ко второй группе модальностей, характеризует-

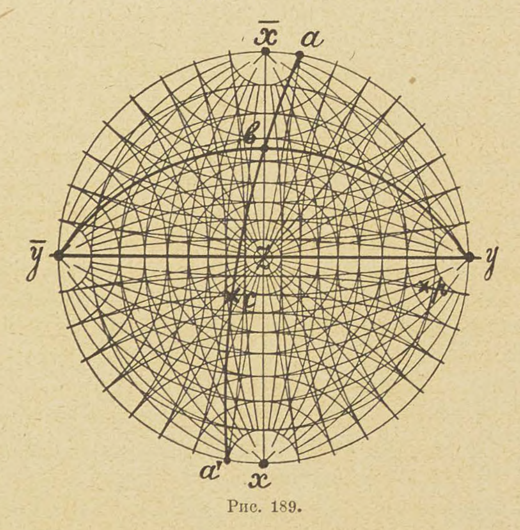


Рис. 189.

ся двойной осью симметрии символа $[\bar{1}10]$. Вторым случаем модальности второго рода является та, осью симметрии которой служит ось [110]. Этими двумя группами модальностей совершенно исчерпываются все модальности, возможные для тетрагоналоидных кристаллов моноклинной сингонии.

Чтобы определить символ комплекса моноклинного кристалла, принимаем во внимание то, что все моноклинные комплексы могут быть рассматриваемы, как результат гомогенной деформации сдвига некоторого ромбического ком-

плекса, причем каждый раз такой ромбический комплекс может быть определен вполне точно.

Символ этого ромбического комплекса должен быть указан полностью в символе моноклинного комплекса, выводящегося из ромбического при помощи моноклинного сдвига. К этой главной основе символа моноклинного комплекса должна быть присоединена величина моноклинного сдвига, направление которого является вполне определенным для каждой модальности. В символе моноклинного комплекса, величина моноклинного сдвига выражается угловым расстоянием, $\angle \chi$, в гномостереографической проекции главной грани, проектирующейся (рис. 189) на диаметре $x\bar{x}$ стереографической сетки, от полюса z этой последней. Это угловое расстояние, равное некоторой определенной величине в моноклинном комплексе, будет служить характеристикой величины моноклинного сдвига, а его численное выражение пишется рядом со знаком, указывающим на принадлежность рассматриваемого моноклинного комплекса к тетрагоналоидным кристаллам, причем для первой группы модальностей моноклинных комплексов величина угла моноклинного сдвига пишется прямо без всякого знака. Величина угла, моноклинного сдвига для второй группы модальностей моноклинной сингонии, ставится в символе комплекса с знаком + или —. Знак + ставится в том случае, если двойной осью комплексиальной симметрии служит ось [010] или [1$\bar{1}$0], а знак — в двух других случаях.

Таким образом, для комплексов моноклинной сингонии мы имеем всего 6 различных, возможных для них, модальностей, символы комплексов которых будут следующие:

$$1)\ \begin{matrix}4s;\chi\\ \alpha\\ \varphi\end{matrix}\ ;\quad 2)\ \begin{matrix}4s;\chi\\ \alpha\\ -\varphi\end{matrix}\ ;\quad 3)\ \begin{matrix}4s;+\chi\\ \alpha\\ \varphi\end{matrix}\ ;\quad 4)\ \begin{matrix}4s;-\chi\\ \alpha\\ \varphi\end{matrix}\ ;$$

$$5)\ \begin{matrix}4s;+\chi\\ \alpha\\ -\varphi\end{matrix}\ ;\quad 6)\ \begin{matrix}4s;-\chi\\ \alpha\\ -\varphi\end{matrix}\ .$$

9. МОДАЛЬНОСТИ ТЕТРАГОНАЛОИДНЫХ КОМПЛЕКСОВ ТРИКЛИННОЙ СИНГОНИИ.

Принимая во внимание, что всякий кристаллический комплекс триклинной сингонии может быть рассматриваем как псевдомоноклинный, мы должны, для нахождения правильной установки такого комплекса, прежде всего, отыскать псевдоплоскость симметрии данного триклинного комплекса. Такой комплексиальной псевдоплоскостью симметрии будет служить одна из тех плоскостей, которые могут вообще являться плоскостями симметрии для тетрагоналоидных моноклинных комплексов. Мы знаем, что плоскостью симметрии тетрагоналоидного моноклинного комплекса может быть плоскость, параллельная одной из следующих граней: (001), (010), (100), $(1\bar{1}0)$ или (110). Одна из этих плоскостей и будет служить псевдоплоскостью симметрии также и в случае тетрагоналоидного триклинного комплекса. Чтобы определить такую псевдоплоскость симметрии, необходимо принять во внимание, что, согласно принципу минимума гомогенной деформации, псевдоплоскость симметрии будет, по своему положению, весьма мало уклоняться от положения действительной плоскости симметрии. Благодаря этому, псевдоплоскостью симметрии будет служить та плоскость, параллельная перечисленным выше граням комплекса, перпендикуляр к которой будет наименее отклоняться от положения ребра одинакового с ней символа.

Положим, псевдоплоскость симметрии найдена и ее символ будет $(p_1 p_2 p_3)$. Поместим гномостереографическую проекцию этой плоскости в полюсе y (рис. 189) стереографической сетки. При этом, граммастереографическая проекция той же плоскости совпадет с диаметром $x\bar{x}$ стереографической сетки. Если ребро символа $[p_1 p_2 p_3]$ в граммастереографической проекции будет точка p, то пояс граней, параллельных этому ребру, будет в гномостереографической проекции изображаться дугой большого круга $abca'$, для которой точка p служит полюсом. Если бы рассматриваемый нами кристаллический комплекс был моноклинным, то про-

екция зоны $[p_1 p_2 p_3]$ совпала бы с проекцией комплексиальной плоскости симметрии $x\bar{x}$. Для того, чтобы осуществить такое совпадение, в случае комплекса триклинной сингонии, необходимо произвести обратный триклинный сдвиг, переводящий данный триклинный комплекс в моноклинный.

Произведя такой сдвиг, мы превратим ребро $[p_1 p_2 p_3]$, которое можно назвать псевдоосью симметрии триклинного комплекса, в двойную ось симметрии, а псевдоплоскость симметрии в действительную плоскость симметрии выводящегося моноклинного комплекса. После подобной деформации, проекция ребра p совпадет с полюсом y стереографической сетки. Ясно, что для производства подобной гомогенной деформации сдвига, всего удобнее принять за плоскость такого сдвига ту плоскость, которая в граммастереографической проекции изобразится дугой большого круга $yb\bar{y}$. В общем случае, эта плоскость будет иррациональной плоскостью данного триклинного комплекса, а ее положение в стереографической проекции определяется точкою пересечения дуги $abca'$ с диаметром $x\bar{x}$ стереографической сетки, а также тем, что она опирается на диаметр $y\bar{y}$. После обратного триклинного сдвига, наш комплекс превращается в моноклинный, к которому должны быть применены все те правила расположения проекций на стереографической сетке, о которых было сказано выше, при рассмотрении тетрагоналоидных моноклинных комплексов.

Проектируя такой моноклинный комплекс на стереографической сетке согласно этим правилам, и превратив его снова в данный триклинный комплекс при помощи сдвига, плоскость и направление которого теперь нам уже известны, мы можем получить символ рассматриваемого триклинного комплекса, придерживаясь совершенно определенных правил, указанных далее.

Прежде всего заметим, что из каждой возможной для моноклинного комплекса модальности может быть получен триклинный комплекс, при помощи триклинного сдвига, величина, плоскость и направление которого должны быть вполне точно определены в символе комплекса. Величина триклинного сдвига отмечается в символе комплекса угловым рас-

стоянием, $\angle \beta$, между проекцией ребра p и ближайшими, полюсом диаметра $y\bar{y}$ стереографической сетки. Положение плоскости триклинного сдвига определяется величиной двугранного угла, меньшего 90^0, $\angle \psi$, между плоскостями триклинного и моноклинного сдвигов, причем угол между этими плоскостями может быть или положительным или отрицательным, в зависимости от взаимного расположения полюса p и гномостереографической проекции c той главной грани комплекса, которая наиболее близка к параллельности с плоскостью моноклинного сдвига. Если полюс p и проекция c главной грани находятся внутри одной и той же полуокружности стереографической сетки, определяемой диаметром $y\bar{y}$ (модальности a), то $\angle \psi$ получает знак $+$. Если же p и c лежат внутри разных полуокружностей (модальности b), то в символе комплекса перед $\angle \psi$ ставится знак —. Таким образом, число модальностей для комплексов триклинной сингонии вдвое больше числа модальностей для комплексов моноклинной сингонии, так как каждая модальность моноклинной сингонии распадается, в случае комплекса триклинной сингонии, на две различные модальности, в зависимости от того или другого знака угла ψ.

Главное число символа комплекса α, равно как и $\angle \psi$ в случае комплексов триклинной сингонии, имеют совершенно то же значение, как и в символах комплексов моноклинных кристаллов. Это — углы, определяющиеся после двух сдвигов (триклинного и моноклинного), превращающих данный триклинный комплекс в ромбический.

Из сказанного выше мы заключаем, что для триклинных тетрагоналоидных комплексов возможны 12 различных модальностей. Один из символов комплексов, относящийся к первой модальности a первой группы, будет иметь следующий вид:

$$\begin{matrix} 4s; & \chi & \beta \\ \alpha & & +\psi \\ \varphi & & \end{matrix}$$

10. МОДАЛЬНОСТИ ТРИГОНАЛОИДНЫХ КОМПЛЕКСОВ МОНОКЛИННОЙ СИНГОНИИ.

Мы видели в предыдущей главе, что идеальный тригоналоидный комплекс обладает симметрией тригонально-скаленоэдрического вида тригональной гипосингонии. Три двойных оси симметрии этого комплекса, лежащие в плоскости, перпендикулярной к главной особой тройной оси симметрии, равны между собой. Благодаря этому, совершенно безразлично, по какой из этих трех равных двойных осей симметрии мы будем производить гомогенную деформацию положительного или отрицательного растяжения для перехода от идеального тригоналоидного комплекса к тому особому комплексу, который называется псевдо-ромбическим моноклинным тригоналоидным комплексом. Если мы примем за ось такого положительного или отрицательного растяжения ту двойную ось симметрии идеального тригоналоидного комплекса, которая отмечается символом [1$\bar{1}$0], то мы, вообще, можем различать два вида модальностей выводящегося таким путем псевдо-ромбического тригоналоидного комплекса. Различие этих двух видов модальностей будет состоять в том знаке, который имеет производимая гомогенная деформация растяжения. Если такая гомогенная деформация растяжения имеет положительный знак, то это будет соответствовать увеличению угла между перпендикулярами к граням (1$\bar{1}$0) и (0$\bar{1}$1). Если мы подвергнем идеальный тригоналоидный комплекс гомогенной деформации прямого растяжения отрицательного знака, или, другими словами, сжатию по двойной оси симметрии [1$\bar{1}$0], то мы получим вторую модальность псевдо-ромбического тригоналоидного комплекса. Эта вторая модальность будет отличаться от рассмотренной нами первой модальности тем, что угол между перпендикулярами к граням (1$\bar{1}$0) и (0$\bar{1}$1) будет меньше 60°, в то время, как в случае первой модальности этот угол будет больше 60°. Таким образом, для псевдоромбических тригоналоидных комплексов моноклинной сингонии мы имеем две различных модальности — первую и

вторую. Заметим прежде всего, что псевдо-ромбический тригоналоидный комплекс моноклинной сингонии представляет собою только один из специальных частных случаев возможных тригоналоидных комплексов моноклинной сингонии, в котором величина моноклинного сдвига равна нулю. В общем случае, эта величина моноклинного сдвига уже не будет равна нулю и мы должны это иметь в виду при рассмотрении различных модальностей, возможных для тригоналоидных кристаллических комплексов моноклинной сингонии.

Приняв за ось положительного или отрицательного растяжения идеального тригоналоидного комплекса ось симметрии $[1\bar{1}0]$, мы выведем заключение, что плоскостью симметрии моноклинного тригоналоидного комплекса, который выводится путем гомогенной деформации растяжения и сдвига идеального тригоналоидного комплекса, будет служить та плоскость, которая проходит через перпендикуляры к граням $(11\bar{2})$ и (111). Принимая за плоскость сдвига псевдо-ромбического тригоналоидного комплекса моноклинной сингонии ту плоскость, которая проходит через перпендикуляры к граням $(1\bar{1}0)$, $(0\bar{1}1)$ и $(\bar{1}01)$, мы, вообще, можем допустить два различных случая в направлении этого сдвига.

В первом случае направление сдвига будет от гномостереографической проекции грани $(11\bar{2})$ к центру стереографической сетки. В этом случае, после сдвига мы получим такой тригоналоидный моноклинный комплекс, в котором угол между перпендикулярами к граням (111) и $(11\bar{2})$ будет больше 90^0, что и характеризует первую группу модальностей этих комплексов.

Вторая группа модальностей моноклинных тригоналоидных комплексов характеризуется обратным направлением моноклинного сдвига, причем угол между перпендикулярами к граням (111) и $(11\bar{2})$ после сдвига становится меньше 90^0.

Принимая во внимание такие характеристики групп модальностей, возможных для тригоналоидных комплексов моноклинной сингонии, мы выводим заключение о принадлежности псевдо-ромбического тригоналоидного комплекса одно-

временно к той и другой группе рассматриваемых модальностей, в виду того, что в этом комплексе $\angle(111):(11\bar{2}) = 90^0$.

Как первая, так и вторая группы модальностей содержат в себе по две различных модальности, соответственно двум различным модальностям, возможным для псевдо-ромбического тригоналоидного комплекса моноклинной сингонии. Первая модальность той и другой группы характеризуется тем, что угол между перпендикулярами к граням $(1\bar{1}0)$ и $(0\bar{1}1)$ больше 60^0, что соответствует так же, как и для первой модальности псевдо-ромбического тригоналоидного комплекса, положительному растяжению по оси $[1\bar{1}0]$. Вторая модальность обоих групп характеризуется тем же углом, который для этой модальности будет меньше 60^0, что соответствует отрицательному растяжению по оси $[1\bar{1}0]$ идеального тригоналоидного комплекса.

Этими четырьмя модальностями исчерпываются все модальности, возможные для тригоналоидных комплексов моноклинной сингонии.

В символах моноклинных тригоналоидных комплексов главное число α дает величину угла между перпендикулярами к граням (111) и (100) того псевдоромбического тригоналоидного комплекса, из которого данный комплекс может быть выведен путем гомогенной деформации моноклинного сдвига. Угол φ в таком символе комплекса равен $\angle(1\bar{1}0)$: $:(0\bar{1}1) - 60^0$. В случае первой модальности, этот угол имеет знак +, а в случае второй модальности — знак —.

Угол χ дает угловое расстояние перпендикуляра к грани (111) с осью того же символа, причем этот угол, для первой группы модальностей, получает знак +, а для второй —.

Таким образом, мы имеем четыре различных символа комплекса, относящихся к тригоналоидным моноклинным кристаллам.

Эти символы следующие:

$$1)\ \begin{matrix} 3s;\ +\chi \\ \alpha \\ +\varphi \end{matrix}\ ;\quad 2)\ \begin{matrix} 3s;\ +\chi \\ \alpha \\ -\varphi \end{matrix}\ ;\quad 3)\ \begin{matrix} 3s;\ -\chi \\ \alpha \\ +\varphi \end{matrix}\ ;\quad 4)\ \begin{matrix} 3s;\ -\chi \\ \alpha \\ -\varphi \end{matrix}\ .$$

11. МОДАЛЬНОСТИ ТРИГОНАЛОИДНЫХ КОМПЛЕКСОВ ТРИКЛИННОЙ СИНГОНИИ.

Переходя к тригоналоидным комплексам триклинной сингонии, мы, совершенно аналогично случаю тетрагоналоидных комплексов, можем вывести вдвое большее количество модальностей, сравнительно с их числом для тригоналоидных комплексов моноклинной сингонии. Такое увеличение количества возможных модальностей находится в зависимости от различного взаимного положения граммастереографических проекций псевдооси симметрии $[1\bar{1}0]$ триклинного тригоналоидного комплекса и перпендикуляра к грани (111). Это различие в положении совершенно аналогично тому, которое было указано при рассмотрении тетрагоналоидных триклинных комплексов. Точно также, в символе триклинного тригоналоидного комплекса мы отмечаем угол триклинного сдвига β и угол ψ, имеющие то же значение, какое они имеют в символах триклинных тетрагоналоидных комплексов.

Таким образом, для триклинных тригоналоидных комплексов мы имеем всего 8 модальностей, причем символ комплекса модальности a первой модальности первой группы будет следующий:

$$\begin{matrix} 3s; & +\chi & \beta \\ \alpha & & +\psi \\ +\varphi & & \end{matrix}$$

12. МОДАЛЬНОСТИ ГЕКСАГОНАЛОИДНЫХ КОМПЛЕКСОВ РОМБИЧЕСКОЙ СИНГОНИИ.

Перейдем теперь к рассмотрению модальностей кристаллических комплексов различных сингоний, обладающих призматической структурой. В идеальном гексагоналоидном комплексе, т. е. в комплексе кристалла гексагональной сингонии призматической структуры, мы имеем три пары взаимно перпендикулярных двойных осей симметрии, лежащих в одной плоскости:

1) $[010\bar{1}]$; $[0121]$; 2) $[0110]$; $[0\bar{1}12]$; 3) $[0011]$; $[021\bar{1}]$.

Рассматривая эти символы, мы видим, что каждая из двух взаимноперпендикулярных двойных осей симметрии имеет различное комплексиальное значение, между тем как комплексиальное значение каждой пары совершенно тождественно значению другой пары. Имея в виду эти соотношения, мы можем принять за ось гомогенной деформации растяжения, превращающей идеальный гексагоналоидный комплекс в ромбический, двойную ось симметрии $[010\bar{1}]$ идеального комплекса. Так как такое растяжение может иметь различный знак, причем отрицательное растяжение по оси $[010\bar{1}]$ может быть заменено положительным растяжением по оси $[0121]$ некоторого другого идеального гексагоналоидного комплекса, то мы вообще можем различать всего две модальности ромбических комплексов призматической структуры, в зависимости от того, будет ли произведено положительное растяжение идеального комплекса по направлению, перпендикулярному грани $(010\bar{1})$ или (0121). В случае положительного растяжения по оси $[010\bar{1}]$ мы получаем первую модальность ромбического гексагоналоидного комплекса. В гномостереографической проекции граней такого комплекса, угол между $(010\bar{1})$ и (0110) будет больше 60^0. Вторая модальность, получающаяся в результате положительного растяжения по оси (0121) идеального гексагоналоидного комплекса, характеризуется $\angle (010\bar{1}):(0110) < 60^0$.

В символе комплекса гексагоналоидных ромбических кристаллов, кроме главного числа $\alpha = \angle (1000):(1110)$, мы отмечаем угол $\varphi = \angle (010\bar{1}):(0110) - 60^0$, причем этот угол имеет знак + для первой модальности и знак — для второй. Таким образом, символы комплексов гексагоналоидных ромбических кристаллов могут быть представлены в таком виде:

$$\begin{matrix} 6 & & 6 \\ \alpha & \text{и} & \alpha \\ +\varphi & & -\varphi \end{matrix}$$

13. МОДАЛЬНОСТИ ГЕКСАГОНАЛОИДНЫХ КОМПЛЕКСОВ МОНОКЛИННОЙ СИНГОНИИ.

Модальности гексагоналоидных комплексов моноклинной сингонии могут быть разделены на две группы, причем первая группа заключает в себе две различных модальности, а вторая — четыре. Первая группа модальностей будет характеризоваться тем, что перпендикуляр к грани (1000) будет служить двойной осью комплексиальной симметрии; в этом случае плоскостью моноклинного сдвига будет служить та плоскость, в которой находятся перпендикуляры к граням (1000) и (010$\bar{1}$). В этой группе модальностей мы можем различать две модальности, которые по своему значению совершенно соответствуют двум модальностям, возможным для ромбических гексагоналоидных комплексов. Первая модальность будет характеризоваться тем, что угол между гранями (010$\bar{1}$) и (0110) будет больше 60°, а характеристикой второй модальности будет служить тот же угол, но по величине уже меньший 60°.

Вторая группа модальностей моноклинных гексагоналоидных комплексов характеризуется постоянной плоскостью моноклинного сдвига, перпендикулярной оси [1000] и проходящей через центр симметрии комплекса. Эта группа модальностей обнимает собою те комплексы моноклинной сингонии, двойной осью симметрии которых служит одна из осей [010$\bar{1}$] или [0121]. В зависимости от различия символа двойной оси комплексиальной симметрии, в этой второй группе модальностей различаются два разряда: первый разряд модальностей, характеризующийся двойной осью комплексиальной симметрии символа [010$\bar{1}$] и второй разряд модальностей, характеризующийся осью комплексиальной симметрии символа [0121]. Так же, как и в первой группе модальностей, мы имеем, для каждого разряда второй группы, две модальности: первую, характеризующуюся $\angle$ (010$\bar{1}$) : (0110) > 60° и вторую модальность, характеризующуюся $\angle$ (010$\bar{1}$) : (0110) < 60°. Таким образом, для гексагоналоидных моноклинных комплексов мы имеем всего шесть различных модальностей.

В символе комплекса гексагоналоидного моноклинного кристалла так же, как и вообще в символах всевозможных моноклинных комплексов, кроме ромбической основы указывается величина угла моноклинного сдвига χ. Этот угол не имеет знака для первой группы модальностей моноклинных комплексов призматической структуры. В символах комплексов первого разряда второй группы модальностей этот угол χ получает знак $+$, а символы комплексов второго разряда модальностей той же группы имеют угол χ с знаком $-$.

Таким образом, шесть модальностей моноклинных гексагоналоидных комплексов получают следующие символы:

$$1)\ \begin{matrix} 6;\ \chi \\ \alpha \\ +\varphi \end{matrix}\ ;\quad 2)\ \begin{matrix} 6;\ \chi \\ \alpha \\ -\varphi \end{matrix}\ ;\quad 3)\ \begin{matrix} 6;+\chi \\ \alpha \\ +\varphi \end{matrix}\ ;\quad 4)\ \begin{matrix} 6;+\chi \\ \alpha \\ -\varphi \end{matrix}\ ;$$

$$5)\ \begin{matrix} 6;\ -\chi \\ \alpha \\ +\varphi \end{matrix}\ ;\quad 6)\ \begin{matrix} 6;\ -\chi \\ \alpha \\ -\varphi \end{matrix}\ .$$

14. МОДАЛЬНОСТИ ГЕКСАГОНАЛОИДНЫХ КОМПЛЕКСОВ ТРИКЛИННОЙ СИНГОНИИ.

Число модальностей для кристаллических комплексов триклинной сингонии, относящихся к гексагоналоидным, совершенно аналогично случаям тетрагоналоидных и тригоналоидных комплексов, будет вдвое больше, сравнительно с числом модальностей, возможных для комплексов моноклинной сингонии призматической структуры. Таким образом, для комплексов триклинной сингонии призматической структуры мы имеем всего 12 модальностей, так как из каждой модальности моноклинного комплекса, вообще, могут быть выведены два соответствующих ему триклинных комплекса модальностей *a* и *b*.

Символ комплекса модальности *a*, первой модальности первой группы для гексагоналоидных комплексов триклинной сингонии, будет иметь такой вид:

$$\begin{array}{ccc} & 6;\ \chi & \beta \\ & \alpha & +\psi \\ +\varphi & & \end{array}$$

где β и ψ имеют совершенно тот же смысл и значение, какое имеют эти величины для всех вообще комплексов триклинной сингонии.

15. ВЕРОЯТНОСТЬ УСТАНОВКИ.

Из закона кристаллографических пределов и связанного с ним принципа минимума гомогенных деформаций само собой вытекает следующее общее положение относительно правильной установки кристаллов: та установка будет более правильной, при которой отклонение данного кристаллического комплекса от соответствующего ему идеального будет наименьшим.

Выражением отклонения данного кристаллического комплекса от соответствующего идеального может служить величина тех гомогенных деформаций растяжения и сдвига, которым необходимо подвергнуть данный комплекс для превращения его в идеальный. Введя соответственные факторы, характеризующие величины гомогенных деформаций, в найденное выше выражение „цены установки“ — V, мы получим общий критерий правильной установки, данный проф. Е. С. Федоровым и названный им „вероятностью установки“ — W.

Необходимыми для определения вероятности установки факторами, прежде всего служат косинусы углов отклонения главной призмы от 90^0 для тетрагоналоидных комплексов и от 60^0 для комплексов гексагоналоидных и тригоналоидных.

В случае кристаллических комплексов моноклинной и триклинной сингоний, к выражению величины отклонения главной призмы должно быть присоединено выражение величины моноклинного и триклинного сдвигов. Такими выражениями служат также величины косинусов соответственных углов. Все, необходимые для определения таких факторов, угловые

величины непосредственно получаются из символа комплекса, соответствующего данному кристаллическому многограннику.

В общем случае, для кристаллических комплексов триклинной сингонии, такими угловыми величинами будут служить $\angle 2\varphi$, $\angle \chi$ и $\angle \beta$ символа комплекса. Таким образом, общая характеристика кристаллов при помощи символов комплексов, имеет еще то особое преимущество перед другими возможными характеристиками, что только символ комплекса непосредственно дает необходимые угловые величины для вычисления вероятности установки кристаллов, получающей следующее общее выражение:

$$W = \frac{R}{J} \cos 2\varphi . \cos \chi . \cos \beta .$$

16. КАНОНИЧЕСКИЙ ПАРАЛЛЕЛОЭДР.

Закон кристаллографических пределов должен быть распространен не только на пространственные решетки, характеризующие различные кристаллические комплексы, но и на те параллелоэдры, совокупность которых их образует. Применение закона кристаллографических пределов к параллелоэдрам различных кристаллических комплексов дает возможность, в каждом реальном случае, вывести один единственный параллелоэдр, вполне подчиняющийся второму общему закону кристаллизации и носящий название канонического.

Вывод канонического параллелоэдра из той пространственной решетки, которую мы приписываем данному кристаллическому комплексу, должен быть в каждом частном случае вполне однозначным. Применение закона кристаллографических пределов для нахождения канонического параллелоэдра совершенно аналогично применению того же закона для правильной установки кристаллического комплекса. Таким образом, в каждом частном случае, каноническим параллелоэдром будет тот, который будет всего меньше отличаться от параллелоэдра, характеризующего идеальные кристаллические комплексы, т. е. комплексы тетрагональной или гексагональной сингонии. В виду того, что закон кристаллогра-

фических пределов устанавливает два типа кристаллических комплексов, кубический и гипогексагональный, мы, вообще, можем сказать, что канонические параллелоэдры, характеризующие идеальные комплексы, будут вполне определенными, и их вывод, для каждого частного случая отдельно, не будет представлять никакого затруднения. Однако, принимая во внимание возможность трех различных видов структуры для комплексов кубического типа строения, мы, вообще, можем вывести для каждого из таких комплексов три различных канонических параллелоэдра, в зависимости от предполагаемой структуры данного комплекса. Как мы видели в предыдущей главе, такими параллелоэдрами для изотропных комплексов будут: куб — при гексаэдрической структуре, ромбический додекаэдр — при додекаэдрической структуре и комбинация куба с октаэдром — при октаэдрической структуре. Если мы имеем дело с идеальным тетрагоналоидным комплексом, т. е. с комплексом тетрагональной сингонии, то такому комплексу мы, вообще, можем приписать, в зависимости от предполагаемой его структуры, три различных параллелоэдра, получающихся путем гомогенной деформации одного из трех параллелоэдров, возможных для различных структур кубически-изотропного комплекса. Примем во внимание, что самое понятие о параллелоэдре в канонической форме, или о каноническом параллелоэдре, заключает в себе непременное условие однозначности вывода такого параллелоэдра из пространственной решетки, которая ему соответствует.

Представим себе комплекс идеального тетрагоналоидного кристалла. Положим, что мы, по целому ряду определенных признаков и по характеру развитых форм, наблюдавшихся в данном реальном случае, можем с уверенностью сказать, что такой кристаллический комплекс не может обладать гексаэдрической структурой. Таким образом, в данном случае нам остается возможность предположить октаэдрическую или додекаэдрическую структуру рассматриваемого тетрагонального комплекса. В случае того и другого предположения, мы имеем две, совершенно самостоятельные, различные между собой, пространственные решетки, определяющие

плотности сеток граней кристаллического комплекса. Посмотрим теперь, какое соотношение существует между такими двумя пространственными решетками, из которых одна относится к додекаэдрической, а другая к октаэдрической структуре.

Положим, что взятый нами тетрагональный кристаллический комплекс по своим углам весьма близок к изотропному. Возьмем некоторый небольшой участок пространственной решетки, характеризующий наш кристаллический комплекс и изображенный на прилагаемом рисунке 190; примем, что *h*, *k*, *f* и *a* — гомологические точки, относящиеся к плоской сетке граней {001}. Взятую нами пространственную решетку мы можем рассматривать с двух точек зрения: во-первых, мы можем принять, что гомологические точки *a*, *b*, *d* и *g* определяют плоскую сетку грани (100), а точки *b*, *f*, *l* и *e* относятся к плоской сетке грани (010). Если промежутки рядов *gb*, *lb* и *ab* равны между собой, то наш идеальный тетрагоналоидный комплекс, по своей пространственной решетке, будет тождественным с изотропным, причем, в случае такого расположения гомологических точек, какое мы видим на рис. 190, взятый нами комплекс будет обладать додекаэдрической структурой.

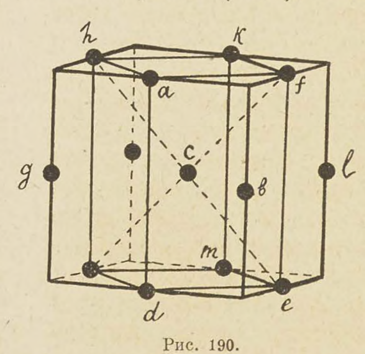


Рис. 190.

Мы можем сделать, однако, кроме того еще и другое предположение: приняв за плоскую сетку грани (001) ту плоскость пространственной решетки, которая определяется гомологическими точками *a*, *h*, *k* и *f*, мы можем предположить, что грань (100) будет определяться плоской сеткой *a*, *d*, *e* и *f*, а грань (010) — плоской сеткой *f*, *e*, *k* и *m*. При этом последнем предположении мы приходим к заключению относительно октаэдрической структуры того же комплекса. Приняв за направления трех кристаллографических осей ряды *de*, *em* и *ef* пространственной решетки и считая про-

межуток ряда $ef = ad = 1$, мы будем иметь $de = em = \frac{1}{\sqrt{2}}$, а отношение единичных отрезков по таким кристаллографическим осям выразится $a : b : c = 1 : 1 : \sqrt{2}$.

Таким образом, наш кристаллический комплекс, являющийся псевдокубическим в случае его додекаэдрической структуры, будет уже сильно отличаться от изотропного, если предположить его октаэдрическую структуру, и будет характеризоваться положительным растяжением по третьей кристаллографической оси, равным $\sqrt{2}$. Несмотря на это, как при первом, так и при втором предположении мы имеем совершенно одну и ту же пространственную решетку, а следовательно, одни и те же плотности сеток граней одинакового положения, причем эти грани будут обладать различными символами, в зависимости от того, сделали ли мы первое или второе из наших предположений. Такое различие символов граней находится, как мы видели, в связи с различием структуры данного кристаллического комплекса, что, в свою очередь, связано с различием параллелоэдров, слагающих рассматриваемый нами кристаллический многогранник. В случае первого предположения, мы заключаем о том, что параллелоэдр, характеризующий данный комплекс является ромбическим додекаэдром. В случае второго предположения, наш кристаллический комплекс будет характеризоваться параллелоэдром, получающимся из гептапараллелоэдра кубической сингонии путем гомогенной деформации положительного растяжения по четверной оси симметрии символа [001].

Представим себе, что кристаллический многогранник, являющийся реальным представителем взятого нами для рассмотрения идеального тетрагоналоидного комплекса, при ближайшем исследовании оказывается не только псевдо-изотропным, но и на самом деле изотропным, т. е. кристаллом кубической сингонии. Такой случай вполне возможен и мы могли бы его всегда ожидать, если бы мы сделали именно первое предположение относительно структуры нашего кристаллического комплекса. Если же мы сделаем второе из наших предположений, то такой вывод нам будет казаться

странным и мало вероятным. Заметим, кроме того, что подобная двойственность в определении параллелоэдров возможна решительно для всех тетрагоналоидных комплексов, обладающих октаэдрической или додекаэдрической структурой.

Из только что изложенного, сам собой вытекает вывод относительно возможного выхода из такого положения, затрудняющего однозначное решение вопроса относительно вида канонического параллелоэдра. Этот выход может быть найден в том, что в случае тетрагоналоидных комплексов октаэдрической или додекаэдрической структур мы распространяем действие закона кристаллографических пределов также и на идеальные кристаллические комплексы. Такое распространение закона кристаллографических пределов состоит в том, что, определив по данным измерения пространственную решетку, характеризующую исследуемый нами кристаллический комплекс, мы выбираем такие три кристаллографические оси, которые не только наиболее близки к ортогональности, но и возможно меньше отличаются между собой по величине единичных отрезков.

Из этих рассуждений чрезвычайно легко вывести общее правило для однозначного решения вопроса относительно вида канонического параллелоэдра в случаях различных структур тетрагоналоидных кристаллических комплексов. Правило это следующее:

Если, применяя критерий правильной установки, мы для тетрагонального кристалла получили октаэдрическую структуру и главное определяющее число символа комплекса 60^0 или больше, то необходимо заменить кристаллографические оси промежуточными, отрезок по главной оси уменьшить в отношении $\sqrt{2}$ и принять додекаэдрическую структуру; если получим додекаэдрическую структуру и главное определяющее число меньше 50^0, то также необходимо заменить оси промежуточными, отрезок по главной оси увеличить в отношении $\sqrt{2}$ и принять октаэдрическую структуру.

Совершенно аналогичное по своему значению и выводу правило может быть дано также и для тригоналоидных комплексов. Правило это следующее:

Гексаэдрическая структура тригональных кристаллов допустима лишь в пределах 45^0 — $63\frac{1}{2}^0$. В этих же пределах допустимы и два другие вида структуры. Если главное определяющее число символа комплекса меньше 45^0, то допустима лишь октаэдрическая, а если это определяющее число есть $63\frac{1}{2}^0$ или больше, то допустима лишь додекаэдрическая структура.

Если бы мы, применяя критерий правильной установки, вывели для символа комплекса число, меньшее, чем 45^0 и додекаэдрическую структуру, то должны были бы изменить установку на гексаэдрическую с углом меньшим, чем $63\frac{1}{2}^0$; если, при тех же углах, мы вывели бы гексаэдрическую структуру, то должны были бы заменить ее додекаэдрическою тоже с углом меньшим, чем $63\frac{1}{2}^0$.

И наоборот, если бы мы вывели для символа комплекса число, большее, чем $63\frac{1}{2}^0$ и октаэдрическую установку, то должны были бы изменить установку на гексаэдрическую, с углом большим, чем 45^0; если, при тех же углах, мы вывели бы гексаэдрическую структуру, то должны были бы заменить ее додекаэдрическою, тоже с углом большим, чем 45^0.

17. ТАБЛИЦА УСЛОВИЙ ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ ПРАВИЛЬНОГО СИМВОЛА КОМПЛЕКСА И ПРАВИЛЬНОЙ ОРИЕНТИРОВКИ ПРОЕКЦИЙ ЭЛЕМЕНТОВ ДАННОГО КРИСТАЛЛИЧЕСКОГО МНОГОГРАННИКА НА СТЕРЕОГРАФИЧЕСКОЙ СЕТКЕ.

Общий знак символа комплекса Sc.

I. Кубический тип.

s — структура; $s = h$ — гексаэдрическая; $s = o$ — октаэдрическая; $s = d$ — додекаэдрическая.

I. a. Тетрагоналоидный отдел (ряд).

Общая характеристика отдела — 4.

Главная особая ось наибольшего растяжения [001].

$\angle \alpha = \angle (001):(111)$; гексаэдрическая структура h возможна при всякой величине угла α; октаэдрическая структура o возможна при $\angle \alpha < 60^0$; додекаэдрическая структура d возможна при

$$\angle \alpha > 50^0; \quad \angle \varphi = \angle (100):(110) - 45^0.$$

1. Кубическая сингония.

$$Sc. = \begin{matrix} 4s \\ 54^0 44' \end{matrix}$$

2. Тетрагональная сингония.

$$Sc. = \begin{matrix} 4s \\ \alpha \end{matrix}$$

3. Ромбическая сингония.

$$\angle (100):(110) > \angle (010):(110)$$

a. Модальность первого рода.

$$\angle (100):(010) = 90^0;$$
$$\angle (110):(1\bar{1}0) > 90^0.$$
$$Sc. = \begin{matrix} 4s \\ \alpha \\ \varphi \end{matrix}$$

b. Модальность второго рода.

$$\angle (110):(1\bar{1}0) = 90^0;$$
$$\angle (100):(010) > 90^0.$$
$$Sc. = \begin{matrix} 4s \\ \alpha \\ -\varphi \end{matrix}$$

4. Моноклинная сингония.

χ — угол моноклинного сдвига; $\angle \alpha$ и $\angle \varphi$ определяются после сдвига.

A. *Первая группа модальностей.*

Двойная ось симметрии комплекса: [001].

a. Модальность первого рода.

Плоскость моноклинного сдвига перпендикулярна граням (100) и (001).

$\angle (100):(010) < 90^0$;

$90^0 - \angle (100):(010) <$

$< 90^0 - \angle (110):(\bar{1}10)$.

$$Sc. = \begin{matrix} 4s;\ \chi \\ \alpha \\ \varphi \end{matrix}$$

b. Модальность второго рода:

Плоскость моноклинного сдвига перпендикулярна граням (001) и $(1\bar{1}0)$.

$\angle (100):(010) > 90^0$;

$\angle (100):(010) - 90^0 >$

$> \angle (110):(1\bar{1}0) - 90^0$;

$\angle (110):(010) >$

$> \angle (\bar{1}10):(010)$.

$$Sc. = \begin{matrix} 4s;\ \chi \\ \alpha \\ -\varphi \end{matrix}$$

B. *Вторая группа модальностей.*

Плоскость моноклинного сдвига перпендикулярна оси [001].

a. Модальности первого рода.

1. Ось симметрии комплекса: [010].

$\angle (001):(100) < 90^0$.

$$Sc. = \begin{matrix} 4s;\ +\chi \\ \alpha \\ \varphi \end{matrix}$$

2. Ось симметрии комплекса: [100].

$\angle (001):(010) < 90^0$.

$$Sc. = \begin{matrix} 4s;\ -\chi \\ \alpha \\ \varphi \end{matrix}$$

b. Модальности второго рода.

$\angle (110):(1\bar{1}0) = 90^0$;

$\angle (100):(010) > 90^0$.

1. Ось симметрии комплекса: $[1\bar{1}0]$.

$\angle (110):(001) > 90^0$.

$$Sc. = \begin{matrix} 4s;\ +\chi \\ \alpha \\ -\varphi \end{matrix}$$

2. Ось симметрии комплекса: [110].

$\angle (1\bar{1}0):(001) > 90^0$.

$$Sc. = \begin{matrix} 4s;\ -\chi \\ \alpha \\ -\varphi \end{matrix}$$

5. Триклинная сингония.

$\angle \beta < \chi$; $\angle \alpha$ и $\angle \varphi$ определяются после моноклинного и триклинного сдвигов: $\angle \chi$ и положение плоскости моноклинного сдвига определяются после триклинного сдвига.

A. *Первая группа модальностей.*

Псевдоось симметрии комплекса [001].

a. Модальность первого рода.

Плоскость моноклинного сдвига перпендикулярна граням

(100) и (001).

$$\angle (100):(010) < 90^0;$$

$$\angle (100):(001) < 90^0;$$

$$90^0 - \angle (100):(010) < 90^0 - \angle (110):(\bar{1}10).$$

Модальность *a*.

$$\mathrm{Sc.} = \begin{matrix} 4s;\ \chi & \beta \\ \alpha & +\psi \\ \varphi & \end{matrix}$$

Модальность *b*.

$$\mathrm{Sc.} = \begin{matrix} 4s;\ \chi & \beta \\ \alpha & -\psi \\ \varphi & \end{matrix}$$

b. Модальность второго рода.

Плоскость моноклинного сдвига перпендикулярна граням

(001) и $(1\bar{1}0)$.

$$\angle (100):(010) > 90^0;$$

$$\angle (100):(001) > 90^0;$$

$$\angle (100):(010) - 90^0 > \angle (110):(1\bar{1}0) - 90^0;$$

$$\angle (110):(010) > \angle (\bar{1}10):(010)$$

Модальность *a*.

$$\mathrm{Sc.} = \begin{matrix} 4s;\ \chi & \beta \\ \alpha & +\psi \\ -\varphi & \end{matrix}$$

Модальность *b*.

$$\mathrm{Sc.} = \begin{matrix} 4s;\ \chi & \beta \\ \alpha & -\psi \\ -\varphi & \end{matrix}$$

B. *Вторая группа модальностей.*

Плоскость моноклинного сдвига перпендикулярна оси [001].

a. Модальности первого рода.

$$\angle (100):(010) < 90^0;$$

$$\angle (100):(001) < 90^0.$$

b. Модальности второго рода.

$$\angle (100):(010) > 90^0;$$

$$\angle (100):(001) > 90^0.$$

1. Псевдоось симметрии комплекса — [010].

Модальность *a*.

$$\mathrm{Sc.} = \begin{array}{lll} & 4s; +\chi & \beta \\ \alpha & & +\psi \\ \varphi & & \end{array}$$

Модальность *b*.

$$\mathrm{Sc.} = \begin{array}{lll} & 4s; +\chi & \beta \\ \alpha & & -\psi \\ \varphi & & \end{array}$$

2. Псевдоось симметрии комплекса — [100].

Модальность *a*.

$$\mathrm{Sc.} = \begin{array}{lll} & 4s; -\chi & \beta \\ \alpha & & +\psi \\ \varphi & & \end{array}$$

Модальность *b*.

$$\mathrm{Sc.} = \begin{array}{lll} & 4s; -\chi & \beta \\ \alpha & & -\psi \\ \varphi & & \end{array}$$

1. Псевдоось симметрии комплекса — $[1\bar{1}0]$.

Модальность *a*.

$$\mathrm{Sc.} = \begin{array}{lll} & 4s; +\chi & \beta \\ \alpha & & +\psi \\ -\varphi & & \end{array}$$

Модальность *b*.

$$\mathrm{Sc.} = \begin{array}{lll} & 4s; +\chi & \beta \\ \alpha & & -\psi \\ -\varphi & & \end{array}$$

2. Псевдоось симметрии комплекса — [110].

Модальность *a*.

$$\mathrm{Sc.} = \begin{array}{lll} & 4s; -\chi & \beta \\ \alpha & & +\psi \\ -\varphi & & \end{array}$$

Модальность *b*.

$$\mathrm{Sc.} = \begin{array}{lll} & 4s; -\chi & \beta \\ \alpha & & -\psi \\ -\varphi & & \end{array}$$

1. b. Тригоналоидный отдел (ряд).

Общая характеристика отдела — 3.

Главная особая ось наибольшего растяжения: [111].

$$\angle \alpha = \angle (111) : (100),$$

гексаэдрическая структура *h* возможна при $63\frac{1}{2}^0 > \angle \alpha > 45^0$;

октаэдрическая структура *o* возможна при $\angle \alpha < 63\frac{1}{2}^0$;

додекаэдрическая структура *d* возможна при $\angle \alpha > 45^0$;

$$\angle \varphi = < (1\bar{1}0) : (0\bar{1}1) - 60^0.$$

1. Тригональная гипосингония.

$$Sc. = \frac{3s}{\alpha}$$

2. Моноклинная сингония.

Двойная ось симметрии комплекса — $[1\bar{1}0]$.

χ — угол моноклинного сдвига; $\angle\alpha$ и $\angle\varphi$ определяются после сдвига.

Плоскость моноклинного сдвига перпендикулярна $[111]$.

A. *Первая группа модальностей.*

$$\angle(111):(11\bar{2}) > 90^0.$$

1. Первая модальность.

$$\angle(1\bar{1}0):(0\bar{1}1) > 60^0.$$

$$Sc. = \begin{matrix} 3s; +\chi \\ \alpha \\ +\varphi \end{matrix}$$

2. Вторая модальность.

$$\angle(1\bar{1}0):(0\bar{1}1) < 60^0.$$

$$Sc. = \begin{matrix} 3s; +\chi \\ \alpha \\ -\varphi \end{matrix}$$

B. *Вторая группа модальностей.*

$$\angle(111):(11\bar{2}) < 90^0.$$

1. Первая модальность.

$$\angle(1\bar{1}0):(0\bar{1}1) > 60^0.$$

$$Sc. = \begin{matrix} 3s; -\chi \\ \alpha \\ +\varphi \end{matrix}$$

2. Вторая модальность.

$$\angle(1\bar{1}0):(0\bar{1}1) < 60^0.$$

$$Sc. = \begin{matrix} 3s; -\chi \\ \alpha \\ -\varphi \end{matrix}$$

3. Триклинная сингония.

Псевдоось симметрии комплекса $[1\bar{1}0]$.

$$\angle(100):(110) > \angle(010):(110).$$

$\angle\beta \lesseqgtr \angle\chi$; $\angle\alpha$ и $\angle\varphi$ определяются после моноклинного и триклинного сдвигов; $\angle\chi$ и положение плоскости моноклинного сдвига определяются после триклинного сдвига.

A. *Первая группа модальностей.*

$\angle\,(111):(11\bar{2}) > 90^0$ после триклинного сдвига.

1. Первая модальность.

$\angle\,(1\bar{1}0):(0\bar{1}1) > 60^0$.

Модальность *a*.

$$\mathrm{Sc.} = \begin{array}{lll} 3s; & +\chi & \beta \\ \alpha & & +\psi \\ +\varphi & & \end{array}$$

Модальность *b*.

$$\mathrm{Sc.} = \begin{array}{lll} 3s; & +\chi & \beta \\ \alpha & & -\psi \\ +\varphi & & \end{array}$$

2. Вторая модальность.

$\angle\,(1\bar{1}0):(0\bar{1}1) < 60^0$.

Модальность *a*.

$$\mathrm{Sc.} = \begin{array}{lll} 3s; & +\chi & \beta \\ \alpha & & +\psi \\ -\varphi & & \end{array}$$

Модальность *b*.

$$\mathrm{Sc.} = \begin{array}{lll} 3s; & +\chi & \beta \\ \alpha & & -\psi \\ -\varphi & & \end{array}$$

B. *Вторая группа модальностей.*

$\angle\,(111):(112) < 90^0$ после триклинного сдвига.

1. Первая модальность.

$\angle\,(1\bar{1}0):(0\bar{1}1) > 60^0$.

Модальность *a*.

$$\mathrm{Sc.} = \begin{array}{lll} 3s; & -\chi & \beta \\ \alpha & & +\psi \\ +\varphi & & \end{array}$$

Модальность *b*.

$$\mathrm{Sc.} = \begin{array}{lll} 3s: & -\chi & \beta \\ \alpha & & -\psi \\ +\varphi & & \end{array}$$

2. Вторая модальность.

$\angle\,(1\bar{1}0):(0\bar{1}1) < 60^0$.

Модальность *a*.

$$\mathrm{Sc.} = \begin{array}{lll} 3s; & -\chi & \beta \\ \alpha & & +\psi \\ -\varphi & & \end{array}$$

Модальность *b*.

$$\mathrm{Sc.} = \begin{array}{lll} 3s; & -\chi & \beta \\ \alpha & & -\psi \\ -\varphi & & \end{array}$$

II. Гипогексагональный тип.

Призматическая структура.

Гексагоналоидный отдел (ряд).

Общая характеристика отдела — 6.

$\angle\,\alpha = \angle\,(1000):(1110);\ \angle\,\varphi = \angle\,(010\bar{1}):(0110) - 60^0$.

1. Гексагональная сингония.

$$\mathrm{Sc.} = \begin{matrix} 6 \\ \alpha \end{matrix}$$

2. Ромбическая сингония.

Три двойные оси симметрии комплекса:

$$[1000],\ [010\bar{1}] \text{ и } [0121].$$

1. Первая модальность.

$$\angle (010\bar{1}) : (0110) > 60^0.$$

$$\mathrm{Sc.} = \begin{matrix} 6 \\ \alpha \\ +\varphi \end{matrix}$$

2. Вторая модальность.

$$\angle (010\bar{1}) : (0110) < 60^0.$$

$$\mathrm{Sc.} = \begin{matrix} 6 \\ \alpha \\ -\varphi \end{matrix}$$

3. Моноклинная сингония.

χ — угол моноклинного сдвига; $\angle \alpha$ и $\angle \varphi$ определяются после сдвига.

A. *Первая группа модальностей.*

Двойная ось симметрии комплекса: [1000].

Плоскость моноклинного сдвига перпендикулярна граням

$$(1000) \text{ и } (010\bar{1}).$$

$$\angle (010\bar{1}) : (0121) < 90^0.$$

1. Первая модальность.

$$\angle (010\bar{1}) : (0110) > 60^0.$$

$$\mathrm{Sc.} = \begin{matrix} 6;\ \chi \\ \alpha \\ +\varphi \end{matrix}$$

2. Вторая модальность.

$$\angle (010\bar{1}) : (0110) < 60^0.$$

$$\mathrm{Sc.} = \begin{matrix} 6;\ \chi \\ \alpha \\ -\varphi \end{matrix}$$

B. *Вторая группа модальностей.*

Плоскость моноклинного сдвига перпендикулярна оси [1000].

a. Первый разряд модальностей.

Двойная ось симметрии комплекса : $[010\bar{1}]$.

$$\angle (1000) : (0121) < 90^0.$$

1. Первая модальность.

$\angle (010\bar{1}) : (0110) > 60^0$.

$$Sc. = \begin{matrix} 6; +\chi \\ \alpha \\ +\varphi \end{matrix}$$

2. Вторая модальность.

$\angle (010\bar{1}) : (0110) < 60^0$.

$$Sc. = \begin{matrix} 6; +\chi \\ \alpha \\ -\varphi \end{matrix}$$

b. Второй разряд модальностей.

Двойная ось симметрии комплекса [0121].

$\angle (1000) : (010\bar{1}) < 90^0$.

1. Первая модальность.

$\angle (010\bar{1}) : (0110) > 60^0$.

$$Sc. = \begin{matrix} 6; -\chi \\ \alpha \\ +\varphi \end{matrix}$$

2. Вторая модальность.

$\angle (010\bar{1}) : (0110) < 60^0$.

$$Sc. = \begin{matrix} 6; -\chi \\ \alpha \\ -\varphi \end{matrix}$$

4. Триклинная сингония.

$\angle \alpha$ и $\angle \varphi$ определяются после моноклинного и триклинного сдвигов; $\angle \chi$ и положение плоскости моноклинного сдвига определяются после триклинного сдвига.

$\angle (1000) : (0121) < 90^0$.

А. *Первая группа модальностей.*

Псевдоось симметрии комплекса [1000].

Плоскость моноклинного сдвига перпендикулярна граням (1000) и $(010\bar{1})$.

$\angle (010\bar{1}) : (0121) < 90^0$.

1. Первая модальность.

$\angle (010\bar{1}) : (0110) > 60^0$.

Модальность *a*.

$$Sc. = \begin{matrix} 6; \chi & \beta \\ \alpha & +\psi \\ +\varphi & \end{matrix}$$

2. Вторая модальность.

$\angle (010\bar{1}) : (0110) < 60^0$.

Модальность *a*.

$$Sc. = \begin{matrix} 6; \chi & \beta \\ \alpha & +\psi \\ -\varphi & \end{matrix}$$

Модальность *b*.

$$Sc. = \begin{array}{ccc} 6;\ \chi & & \beta \\ \alpha & & -\psi \\ +\varphi & & \end{array}$$

Модальность *b*.

$$Sc. = \begin{array}{ccc} 6;\ \chi & & \beta \\ \alpha & & -\psi \\ -\varphi & & \end{array}$$

В. *Вторая группа модальностей.*

Плоскость моноклинного сдвига перпендикулярна граням $(010\bar{1})$ и $(01\bar{2}1)$.

$$\angle\,(1000):(010\bar{1}) < 90^0.$$

a. Первый разряд модальностей.

Псевдоось симметрии комплекса: $[010\bar{1}]$.

1. Первая модальность.

$$\angle\,(010\bar{1}):(0110) > 60^0.$$

Модальность *a*.

$$Sc. = \begin{array}{ccc} 6;\ +\chi & & \beta \\ \alpha & & +\psi \\ +\varphi & & \end{array}$$

Модальность *b*.

$$Sc. = \begin{array}{ccc} 6;\ +\chi & & \beta \\ \alpha & & -\psi \\ +\varphi & & \end{array}$$

2. Вторая модальность.

$$\angle\,(010\bar{1}):(0110) < 60^0.$$

Модальность *a*.

$$Sc. = \begin{array}{ccc} 6;\ +\chi & & \beta \\ \alpha & & +\psi \\ -\varphi & & \end{array}$$

Модальность *b*.

$$Sc. = \begin{array}{ccc} 6;\ +\chi & & \beta \\ \alpha & & -\psi \\ -\varphi & & \end{array}$$

b. Второй разряд модальностей.

Псевдоось симметрии комплекса: $[01\bar{2}1]$.

1. Первая модальность.

$$\angle\,(010\bar{1}):(0110) > 60^0.$$

Модальность *a*.

$$Sc. = \begin{array}{ccc} 6;\ -\chi & & \beta \\ \alpha & & +\psi \\ +\varphi & & \end{array}$$

Модальность *b*.

$$Sc. = \begin{array}{ccc} 6;\ -\chi & & \beta \\ \alpha & & -\psi \\ +\varphi & & \end{array}$$

2. Вторая модальность.

$$\angle\,(010\bar{1}):(0110) < 60^0.$$

Модальность *a*.

$$Sc. = \begin{array}{ccc} 6;\ -\chi & & \beta \\ \alpha & & +\psi \\ -\varphi & & \end{array}$$

Модальность *b*.

$$Sc. = \begin{array}{ccc} 6;\ -\chi & & \beta \\ \alpha & & -\psi \\ -\varphi & & \end{array}$$

IX. КРИСТАЛЛОГРАФИЧЕСКИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ ПЛОТНОСТЕЙ СЕТОК ГРАНЕЙ КОМПЛЕКСА.

Для простейшего способа определения относительных плотностей сеток граней данного кристаллического комплекса, всего рациональнее принять за единицу площади величину площади ортогональной проекции элементарного параллелограмма одной из граней (100), (010) или (001) на плоскость, перпендикулярную к двум другим из этих трех граней комплекса.

При таком выборе единицы, все формулы для определения плотностей сеток сильно упрощаются и само определение может быть сделано почти механически.

К таким выводам мы приходим при рассмотрении полярной пространственной решетки, общие свойства которой уже были описаны раньше.

Положим, нам дана некоторая полярная пространственная решетка (рис. 191). Положим $oc_1 \perp (100)$ и по длине равно $s_{(100)}$: $oc_2 \perp (010)$ и по длине равно $s_{(010)}$ и $oc_3 \perp (001)$ и по длине равно $s_{(001)}$.

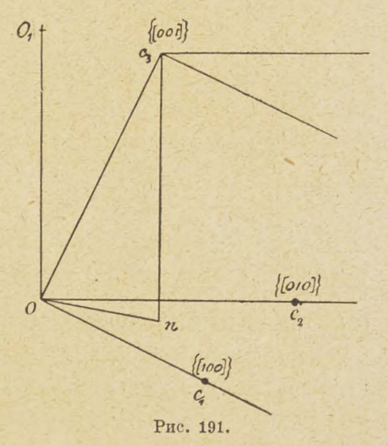


Рис. 191.

Проведем через точку c_3 плоскость, параллельную плоскости, определяемой рядами {[100]} и {[010]} полярной пространственной решетки и восставим из точки o перпендикуляр к плоскости c_1oc_2. Отрезок oo_1 этого перпендикуляра, равен длине c_3n перпендикуляра, опущенного из точки c_3 на плоскость c_1oc_2. Длина $c_3n = oo_1$ будет определять со-

бою расстояние между двумя смежными плоскими сетками символа {[001]} полярной пространственной решетки. Эту длину мы и примем за единицу.

Так как $c_3 n \perp$ к плоскости, определяемой рядами {[100]} и {[010]} полярной пространственной решетки, то oo_1 будет одновременно перпендикулярна к {[100]} и {[010]}. Так как {[100]} и {[010]} — перпендикуляры к граням (100) и (010) первоначальной пространственной решетки, то линия $c_3 n$ будет параллельна ребру пересечения этих граней друг с другом, т. е. она будет перпендикулярна к плоскости, перпендикулярной к граням (100) и (010) первоначальной решетки.

Соединив точки o и n прямой, получаем прямоугольный треугольник $c_3 no$, где угол onc_3 — прямой.

Обозначив $\angle oc_3 n$ равный $\angle o_1 oc_3$ через ϱ, получаем:

$$c_3 n = oc_3 \cdot \cos \varrho.$$

Но $\angle \varrho$ представляет собою угол между перпендикулярами к плоской сетке (001) и к плоскости, перпендикулярной граням (100) и (010). Таким образом: $\angle \varrho = 180^0 - \varrho_1$, где ϱ_1 угол между плоскостью сетки (001) и плоскостью, перпендикулярной к граням (100) и (010).

Так как $oc_3 = s_{(001)}$, то $c_3 n = s_{(001)} \cos \varrho = - s_{(001)} \cos \varrho_1$. Из этого мы заключаем, что $c_3 n$ будет по величине равна проекции площади элементарного параллелограмма плоской сетки (001) на плоскость, перпендикулярную к граням (100) и (010).

Для нахождения относительных плотностей сеток различных граней данного кристаллического комплекса всего удобнее пользоваться гномостереографической проекцией граней этого комплекса.

Посмотрим теперь, каким образом мы можем произвести определения относительных плотностей сеток граней, если нам дана гномостереографическая проекция комплекса.

Пусть (рис. 192) A — гномостереографическая проекция данной грани, ϱ — угол, составляемый ею с центром o про-

екций, R — радиус векториального круга, соответствующий расстоянию первой плоскости полярной решетки (ближайшей плоской сетки, параллельной плоскости чертежа) от центра. Для простоты представим себе, что точка полярной решетки, имеющая символ данной грани, лежит именно в этой первой плоскости. Сделав поворот на 90° около линии OA, мы

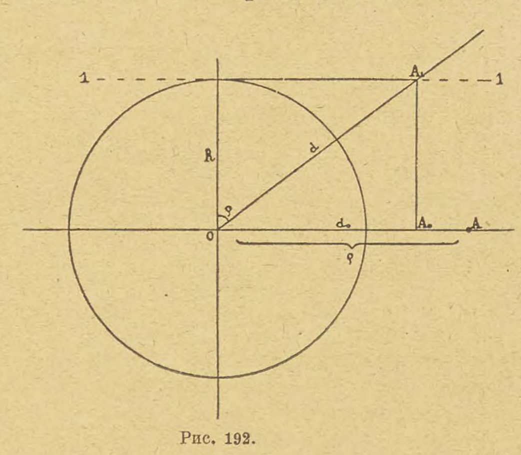


Рис. 192.

увидим, что линия 1 — 1 изобразит собою пересечение этой плоскости с плоскостью чертежа и точка A_1 — пересечение нормали к грани с первой плоскостью; точка A_0 представит проекцию этого пересечения, т. е. точку, соответствующую данной грани в диаграмме полярной решетки. Искомое расстояние OA_1 обозначим через d_1, OA_0 через d_0. Очевидно, что

$$d_1 = \frac{R}{\cos\varrho} \text{ и } d_0 = R \operatorname{tg} \varrho \qquad (1)$$

и, следовательно, плотность данной грани D_1 можно выразить следующим образом:

$$D_1 = k \cdot \frac{1}{d_1^2} = k \cdot \frac{\cos^2\varrho}{R^2}$$

где k — некоторый коэффициент, постоянный для всех граней данной решетки. Так как для нас важны только от-

носительные величины плотностей сеток граней, то мы можем принять $k = 1$ и тогда получим:

$$D_1 = \frac{1}{d_1^2} = \frac{\cos^2 \varrho}{R^2} \qquad (2)$$

То же рассуждение можно применить и к точкам второй плоскости решетки, удаленной от центра проекций на расстояние, в два раза большее по сравнению с первой плоскостью, — к точкам 3-й плоскости и т. д.; разница будет только в коэффициентах перед R. Действительно, если точка, с тем же угловым расстоянием, находится во 2-ой плоскости, то

$$d_2 = \frac{2R}{\cos \varrho}$$

и плотность сетки соответствующей грани

$$D_2 = \frac{\cos^2 \varrho}{4R^2}$$

Для третьей плоскости получим:

$$d_3 = \frac{3R}{\cos \varrho} \text{ и } D_3 = \frac{\cos^2 \varrho}{9R^2}$$

Для четвертой плоскости

$$d_4 = \frac{4R}{\cos \varrho} \text{ и } D_4 = \frac{\cos^2 \varrho}{16R^2} \qquad \text{и т. д.}$$

Отсюда видно, что изменение плотностей сеток граней соответствует изменению функции $\cos^2 \varrho$. Построив кривую, на абсциссе которой отложены градусы от 0^0 до 90^0, а на ординате — $\cos^2$ соответствующих углов, мы будем иметь возможность для всех внутренних точек диаграммы кристалла (не лежащих на основном круге) непосредственно по этой кривой получать плотности сеток граней.

На прилагаемой таблице изображена такая кривая, вычерченная на клетчатой бумаге. При этом принято во внимание следующее соображение. Как видно из вышеприведенных формул, выражение плотности D зависит еще от величины R: можно принять $R = 1$, но тогда для граней уже 3-й плоскости получаются слишком малые величины. Поэто-

му R принято равным $\frac{1}{2}$. Тогда величины D выразятся следующими формулами:

$$D_1 = 4\cos^2\varrho \qquad D_5 = \frac{4}{25}\cos^2\varrho$$

$$D_2 = \cos^2\varrho \qquad D_6 = \frac{1}{9}\cos^2\varrho$$

$$D_3 = \frac{4}{9}\cos^2\varrho \qquad \ldots\ldots\ldots$$

$$D_4 = \frac{1}{4}\cos^2\varrho \qquad \ldots\ldots\ldots$$

Для граней различных плоскостей полярной решетки по бокам кривой приведены соответствующие скалы делений; таким образом, для 1-й плоскости вся ордината кривой ($\varrho = 0^0$) выразится величиной — 4, для 2-й плоскости — величиной 1, для 3-й — $\frac{4}{9}$ (или 0,44 . . .), для 4-й — 0,25 и т. д.

Одно деление абсциссы кривой равно 1^0; одно деление ординаты в самом меньшем масштабе (для 1-й плоскости) соответствует 0,02. В дополнение нужно еще прибавить, что тою же диаграммою кривой можно пользоваться и в предположении, что $R = 1$; нужно только получаемые результаты делить на 4.

Перейдем к вопросу о нахождении плотностей сеток граней основного круга (призматических граней), т. е. таких, точки которых в полярной решетке лежат в нулевой плоскости, или плоскости чертежа. Как мы увидим, плотность сетки грани, принадлежащей к призматическому (вертикальному) поясу, может быть выражена в зависимости от угла ϱ той грани, точка которой в полярной решетке лежит над точкой искомой грани и будет ближайшею к ней. Такую грань мы будем называть определяющей для данной.

В случае тетрагоналоидных и гексагоналоидных кристаллов, точка определяющей грани будет, очевидно, лежать в 1-ой плоскости, а в случае тригоналоидных кристаллов, как будет об'яснено ниже, — в 3-й. Рассмотрим (при обычной установке) расположение граней (001), (011) и (010) в диаграмме полярной решетки триклинного тетрагоналоидного

кристалла (рис. 193); как и раньше, здесь проведена окружность с радиусом, равным расстоянию от нулевой до 1-ой

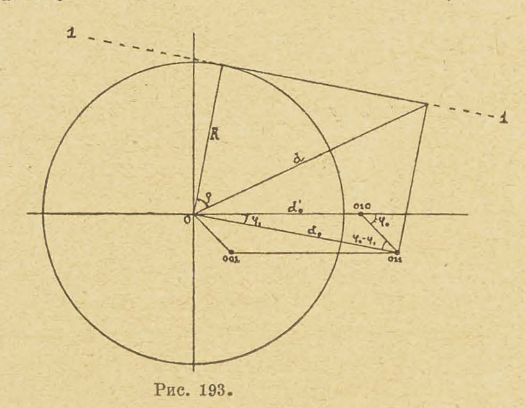


Рис. 193.

плоскости решетки, и линия 1 — 1 представляет след этой плоскости после поворота на 90°. Из чертежа видно, что

$$d_0' = d_0 \frac{\sin(\varphi_0 - \varphi_1)}{\sin \varphi_0} \tag{3}$$

где d_0' — расстояние от центра до точки (010), а

d_0 — расстояние от центра до проекции точки (011) в полярной решетке.

φ_0 и φ_1 — углы, образуемые с меридианом (010) меридианами (011) и (001) на диаграмме кристалла.

Из формулы (1) мы знаем, что

$$d_0 = R \cdot \operatorname{tg} \varrho.$$

Подставляя это выражение вместо d_0 в (3), получаем:

$$d_0' = \frac{R \operatorname{tg} \varrho \cdot \sin(\varphi_0 - \varphi_1)}{\sin \varphi_0},$$

откуда плотность сетки для грани (010) триклинного комплекса:

$$D_0 = \frac{1}{(d_0')^2} = \frac{\sin^2 \varphi_0}{R^2 \operatorname{tg}^2 \varrho \cdot \sin^2(\varphi_0 - \varphi_1)} = \frac{\operatorname{ctg}^2 \varrho \cdot \sin^2 \varphi_0}{R^2 \sin^2(\varphi_0 - \varphi)_1} \tag{4}$$

Для моноклинного комплекса:

$$\varphi_0 = 90^0 \text{ и } D_0 = \frac{\operatorname{ctg}^2 \varrho}{R^2 \cos^2 \varphi_1}$$

Для ромбического и прочих:

$$\varphi_0 = 90^0 \text{ и } \varphi_1 = 0^0;\ D_0 = \frac{\operatorname{ctg}^2 \varrho}{R^2} \tag{5}$$

Отсюда видно, что в случае комплексов: ромбического, тетрагонального и изотропного — выражение для плотности сетки грани (010) находится в очень простой зависимости от угла ϱ между проекцией определяющей грани и центром сетки.

Подобные же рассуждения можно приложить и к прочим граням призматического пояса: для плотности каждой из них будет существовать такая же простая зависимость от угла ϱ соответственной определяющей грани. Для грани (010), как мы видели, определяющей гранью служит (011); для грани (100) определяющей гранью будет (101); для грани (110) определяющей будет грань (111) и т. д.

В гексагоналоидных кристаллах подобным же образом найдем, что для грани $(01\bar{0}1)$ определяющая грань будет $(110\bar{1})$, для (0110) — грань (1110) и т. д., если проекция (1000) располагается в центре.

Величина R может быть выбрана произвольно: если $R = 1$, формула (5) принимает вид

$$D_0 = \operatorname{ctg}^2 \varrho \tag{5}$$

При $R = \frac{1}{2}$ (как принято при составлении кривой для нахождения плотностей сеток внутренних граней):

$$D_0 = 4 \operatorname{ctg}^2 \varrho \tag{5''}$$

Что касается до моноклинных и триклинных комплексов, то и здесь нахождение плотностей сеток граней основного круга сводится в конце концов к той же простой формуле (5), если с помощью сдвига превратим такой комплекс в ромбический. Ромбические кристаллы (и тетрагоналоидные кристаллы высшей симметрии) проектируются обыкновенно

таким образом, что в центре сетки помещается граммастереографическая проекция двойной оси симметрии (при кристаллах высшей симметрии — четверная ось). При такой системе проектирования кристаллов, проекции определяющих граней и соответственных граней основного круга лежат на одном и том же радиусе, а потому и зависимость между плотностью сетки искомой грани и углом ϱ определяющей грани сводится к очень простому выражению.

Если моноклинный комплекс мы станем проектировать таким образом, чтобы двойная ось симметрии поместилась в центре стереографической сетки, — мы точно также получим такую проекцию комплекса, в которой определяющие грани будут лежать на одних радиусах с определяемыми, и плотности сеток последних найдутся по той же формуле (5). При обычном проектировании моноклинных кристаллов, двойная ось симметрии располагается справа налево, а в центре проекций помещается ось (001), не являющаяся двойной осью симметрии. В таком случае, единичная (первая) плоскость сдвинута параллельно самой себе на некоторый угол.

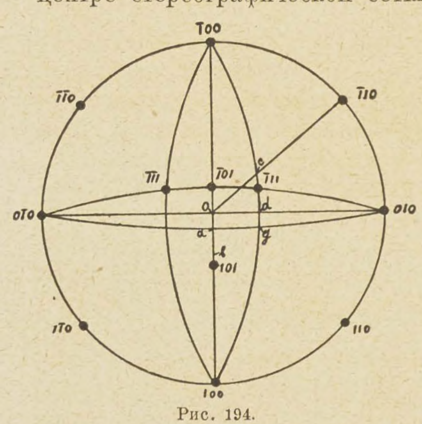


Рис. 194.

На рис. 194 изображена проекция моноклинного кристалла бензил — фталь — изоимида. Произведем моноклинный сдвиг, перемещающий точку *a*, являющуюся проекцией ненаблюдавшейся грани (001), до центра сетки. Если величина сдвига будет *ao*, направление сдвига от (100) к ($\bar{1}00$) и плоскость сдвига — плоскость проекций (100) : (010), то все грани этой плоскости, (проектируемые на основном круге) после сдвига, останутся на месте, а проекции всех других граней переместятся по дугам больших кругов, проходящих через проекции (100) и ($\bar{1}00$). После сдвига, проекции определяющих

и определяемых граней будут находиться уже на одних и тех же радиусах. Так, напр., проекция грани (101) переместится в точку b и $\mathrm{ctg}^2 \angle ob$ (при $R = 1$) будет выражать плотность сетки грани (100); $\mathrm{ctg}^2 \angle od$ даст плотность сетки грани (010), а $\mathrm{ctg}^2 \angle oe$ будет плотностью сетки (110). Заметим, что после такого сдвига перпендикуляр к грани (001) сделался двойною осью симметрии.

Таким образом, применяя сдвиг, делающий перпендикуляр к грани (001) двойной осью симметрии, и располагая эту двойную ось в центре сетки, мы можем и в случае моноклинного комплекса, пользуясь только формулой $D_0 = \frac{\mathrm{ctg}^2 \varrho}{R^2}$, вычислить плотности сеток граней, проектирующихся на основном круге проекций.

В триклинных комплексах мы уже не имеем двойной оси симметрии, и для того, чтобы применить формулу (5) при вычислении плотностей сеток граней основного круга, необходимо произвести такой сдвиг, который превратил бы перпендикуляр к одной из граней (100), (010) или (001) в двойную ось симметрии полярной решетки и, кроме того, поместить эту ось в центре сетки. Для выполнения такого сдвига удобнее предварительно повернуть проекцию триклинного комплекса таким образом, чтобы проекция грани, перпендикуляр к которой мы хотим переместить в центр сетки, пришлась на один из перпендикулярных диаметров, соединяющих полюсы сетки ($0^0 - 180^0$ или $90^0 - 90^0$). В таком случае, при сдвиге, проекции внутренних граней будут перемещаться по дугам больших кругов, соединяющих соответственные полюсы сетки.

Очевидно, что все сказанное относительно тетрагоналоидных кристаллов можно приложить и к гексагоналоидным: и здесь плотность сетки грани, проектирующейся на основном круге, получится в зависимости от ее определяющей грани по той же формуле (5).

В случае тригоналоидных кристаллов, означенная формула несколько видоизменится вследствие того, что определяющая грань, для данной призматической, будет находиться не на 1-й плоскости, а на 3-й. Найти символ такой определяющей

грани, а следовательно и ее угол ρ, очень просто. Представим себе для наглядности ортогональную проекцию полярной решетки тригоналоидного кристалла (рис. 195) в случае тригональной гипосингонии. Точки всех граней призматического пояса будут лежать в нулевой плоскости, проходящей в то же время через центр проекций, которому мы можем придать символ (000); для всякой грани этой плоскости

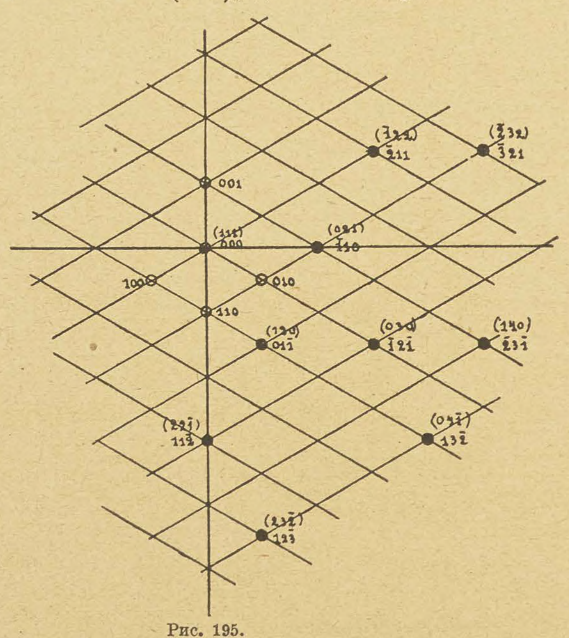


Рис. 195.

сумма индексов символа равна нулю. Ближайшая над центром по вертикали точка решетки будет иметь символ (111) и лежать в 3-й плоскости [рис. 196 — разрез по линии (000) — (11$\bar{2}$)]; всякая точка этой плоскости будет иметь сумму индексов символа = 3. Если мы имеем точку в нулевой плоскости (призматическая грань), то для нахождения символа грани, точка которой в полярной решетке лежит ближе всего над точкой данной грани, нужно каждый

индекс символа данной грани увеличить на 1: тогда мы получим грань, точка которой лежит в 3-й плоскости (т. к. сумма индексов теперь = 3) Ясно, что эта грань будет лежать в то же время в поясе данной грани и (111). Напр., ближайшая точка к $(11\bar{2})$ будет иметь символ $(22\bar{1})$; к $(\bar{1}10)$ — точка (021) и т. д. (на рис. 195 символы определяющих граней поставлены в скобках над символами призматических граней). Положим, нам нужно найти плотность сетки грани $(11\bar{2})$; определяющая для нее грань $(22\bar{1})$; угол ее ϱ от центра сетки находим по диаграмме. Из чертежа (рис. 196) видно, что расстояние от центра до точки определяемой грани

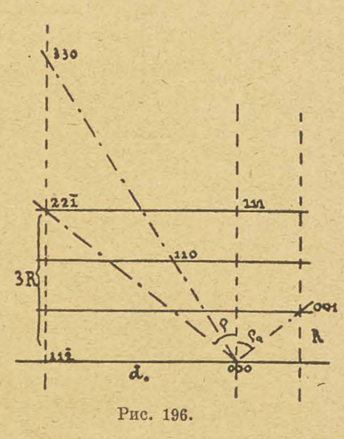


Рис. 196.

$$d_0 = 3\,R\,\mathrm{tg}\,\varrho$$

и, следовательно, плотность сетки этой грани

$$D_0 = \frac{1}{d_0^2} = \frac{1}{9R^2\,\mathrm{tg}^2\,\varrho} = \frac{\mathrm{ctg}^2\,\varrho}{9\,R^2} \qquad (6)$$

При $$R = 1 \text{ имеем } D_0 = \frac{\mathrm{ctg}^2\,\varrho}{9} \qquad (6')$$

При $$R = \frac{1}{2} \quad \text{„} \quad D_0 = \frac{4}{9}\,\mathrm{ctg}^2\,\varrho \qquad (6'')$$

Заметим, что плотность такой грани, как $(11\bar{2})$, т. е. лежащей в одном из главных поясов, в данном случае в поясе (111) : (001), можно найти и по углу ϱ_0 для (001); из чертежа видно, что $\varrho_0 = \varrho$.

Что касается до тригоналоидных кристаллов моноклинной и триклинной сингонии, то к ним можно приложить рассуждения, аналогичные тем, которые были приведены выше для тетрагоналоидных кристаллов тех же сингоний. В данном случае, мы, для моноклинного кристалла, можем тоже произвести моноклинный сдвиг, чтобы привести проекцию грани

(111) в центр, а для триклинного предварительно произвести такой поворот проекции всего комплекса, чтобы (111) пришлась на одном из главных диаметров сетки. Полученные после сдвига углы ϱ определяющих граней и будут входить в формулу (6) для нахождения плотностей сеток соответственных призматических граней.

Таким образом, мы видим, что для различных комплексов плотности сеток граней вертикального пояса всегда определяются по формулам, в которые входят $ctg^2 \varrho$ с некоторым коэффициентом, зависящим от выбранной величины R.

Проще всего, конечно, принять $R = 1$ или $R = \frac{1}{2}$.

Тогда можно наперед иметь таблицы с вычисленными для разных углов выражениями D_0. Такие таблицы приведены ниже, причем величины плотностей сеток вычислены с точностью до 0.01 для каждого полуградуса. В первом столбце помещены угловые величины от 0^0 до 45^0, в 7-м — от 45^0 до 90^0. В промежуточных столбцах находятся величины плотностей сеток: во 2-ом и 6-ом столбцах для тетрагоналоидных (и гексагоналоидных), в предположении, что $R = 1$; в 4-ом для тех же кристаллов в предположении, что $R = \frac{1}{2}$ (только от 45^0 до 90^0); наконец, в 3-м и 5-м столбцах величины плотностей сеток для тригоналоидных кристаллов при $R = \frac{1}{2}$. Те же величины будут служить tg^2 для дополнительных углов (считаемых от основного круга).

Таким образом, по этим таблицам мы можем непосредственно найти плотность сетки любой грани вертикального пояса, зная положение ее определяющей грани. Положим, напр., определяющая грань для данной составляет с центром угол 30^0 и кристалл тетрагоналоидный (или гексагоналоидный); против 30^0 читаем во 2-м столбце плотность 3.00, если $R = 1$; при $R = \frac{1}{2}$, плотность сетки равна 12 ($=4 \times 3.00$); если кристалл тригоналоидный, находим в 3-м столбце 1.33 (при $R = \frac{1}{2}$).

ТАБЛИЦА

для нахождения плотностей сеток граней вертикального пояса.

α	$ctg^2 \alpha$	$^4/_9\ ctg^2 \alpha$	$4\ ctg^2 \alpha_1$	$^4/_9\ ctg^2 \alpha_1$	$ctg^2 \alpha_1$	α_1
0°00′	∞	∞	0.00	0.00	0.00	90°00′
30′	13130.56	5835.80	0.00	0.00	0.00	30′
1°00′	3282.14	1458.73	0.00	0.00	0.00	89°00′
30′	1458.36	648.16	0.00	0.00	0.00	30′
2°00′	820.04	364.46	0.00	0.00	0.00	88°00′
30′	524.58	233.15	0.01	0.00	0.00	30′
3°00′	364.09	161.82	0.01	0.00	0.00	87°00′
30′	267.32	118.81	0.01	0.00	0.00	30′
4°00′	204.51	90.89	0.02	0.00	0.00	86°00′
30′	161.45	71.76	0.02	0.00	0.01	30′
5°00′	130.65	58.07	0.03	0.00	0.01	85°00′
30′	107.86	47.94	0.04	0.00	0.01	30′
6°00′	90.52	40.23	0.04	0.00	0.01	84°00′
30′	77.03	34.24	0.05	0.01	0.01	30′
7°00′	66.33	29.48	0.06	0.01	0.01	83°00′
30′	57.70	25.64	0.07	0.01	0.02	30′
8°00′	50.63	22.50	0.08	0.01	0.02	82°00′
30′	44.77	19.90	0.09	0.01	0.02	30′
9°00′	39.86	17.72	0.10	0.01	0.02	81°00′
30′	35.71	15.87	0.11	0.01	0.03	30′
10°00′	32.16	14.29	0.12	0.01	0.03	80°00′
30′	29.11	12.94	0.14	0.02	0.03	30′
11°00′	26.47	11.76	0.15	0.02	0.04	79°00′
30′	24.16	10.74	0.16	0.02	0.04	30′
12°00′	22.13	9.84	0.18	0.02	0.04	78°00′
30′	20.35	9.04	0.19	0.02	0.05	30′
13°00′	18.76	8.34	0.21	0.02	0.05	77°00′
30′	17.35	7.71	0.23	0.03	0.06	30′
14°00′	16.09	7.15	0.25	0.03	0.06	76°00′
30′	14.95	6.65	0.27	0.03	0.07	30′
15°00′	13.93	6.19	0.29	0.03	0.07	75°00′
α	$tg^2 \alpha_1$	$^4/_9\ tg^2 \alpha_1$	$4\ tg^2 \alpha$	$^4/_9\ tg^2 \alpha$	$tg^2 \alpha$	α_1

α	$ctg^2 \alpha$	$^4/_9\ ctg^2 \alpha$	$4\ ctg^2 \alpha_1$	$^4/_9\ ctg^2 \alpha_1$	$ctg^2 \alpha_1$	α_1
30′	13.00	5.78	0.31	0.03	0.08	30′
16°00′	12.16	5.41	0.33	0.04	0.08	74°00′
30′	11.40	5.07	0.35	0.04	0.09	30′
17°00′	10.70	4.75	0.37	0.04	0.09	73°00′
30′	10.06	4.47	0 40	0.04	0.10	30′
18°00′	9.47	4.21	0.42	0.05	0.11	72°00′
30′	8.93	3.97	0.45	0.05	0.11	30′
19°00′	8.43	3.75	0.47	0.05	0.12	71°00′
30′	7.97	3.54	0.50	0.06	0.13	30′
20°00′	7.55	3.35	0.53	0.06	0.13	70°00′
30′	7.15	3.18	0.56	0.06	0.14	30′
21°00′	6.79	3.02	0.59	0.07	0.15	69°00′
30′	6.44	2 86	0.62	0.07	0.15	30′
22°00′	6.13	2.72	0.65	0.07	0.16	68°00′
30′	5.83	2.59	0.68	0.08	0.17	30′
23°00′	5.55	2.47	0.72	0.08	0.18	67°00′
30′	5.29	2.35	0.75	0 08	0.19	30′
24°00′	5 04	2.24	0 79	0 09	0.20	66°00′
30′	4.81	2.14	0.83	0.09	0.21	30′
25°00′	4·60	2.04	0.87	0.10	0.22	65°00′
30′	4.39	1.95	0.91	0.10	0.23	30′
26°00′	4.20	1.87	0.95	0.11	0.24	64°00
30′	4.02	1.79	0.99	0.11	0.25	30′
27°00′	3.85	1.71	1.04	0.12	0.26	63°00′
30′	3.69	1.64	1.08	0.12	0.27	30′
28°00′	3.54	1.57	1.13	0.13	0.28	62°00′
30′	3.39	1.51	1.17	0.13	0.29	30′
29°00′	3.25	1.45	1.22	0.14	0.31	61°00′
30′	3.12	1.39	1.27	0.14	0.32	30′
30°00′	3.00	1.33	1.33	0.15	0 33	60°00′
α	$tg^2 \alpha_1$	$^4/_9\ tg^2 \alpha_1$	$4\ tg^2 \alpha$	$^4/_9\ tg^2 \alpha$	$tg^2 \alpha$	α_1

α	$\mathrm{ctg}^2\,\alpha$	$^4/_9\,\mathrm{ctg}^2\,\alpha$	$4\,\mathrm{ctg}^2\,\alpha_1$	$^4/_9\,\mathrm{ctg}^2\,\alpha_1$	$\mathrm{ctg}^2\,\alpha_1$	α_1
$30'$	2.88	1.28	1.39	0.15	0.35	$30'$
$31^0 00'$	2.77	1.23	1.44	0.16	0.36	$59^0 00'$
$30'$	2.66	1.18	1.50	0.17	0.38	$30'$
$32^0 00'$	2.56	1.14	1.56	0.17	0.39	$58^0 00'$
30	2.46	1.10	1.62	0.18	0.41	$30'$
$33^0 00'$	2.37	1.05	1.68	0.19	0.42	$57^0 00'$
$30'$	2.28	1.01	1.75	0.19	0.44	$30'$
$34^0 00'$	2.20	0.98	1.82	0.20	0.45	$56^0 00'$
$30'$	2.12	0.94	1.89	0.21	0.47	$30'$
$35^0 00'$	2 04	0.91	1,96	0.22	0.49	$55^0 00'$
$30'$	1.97	0.87	2.03	0.23	0.51	$30'$
$36^0 00'$	1.89	0 84	2.11	0.23	0.53	$54^0 00'$
$30'$	1.83	0.81	2.19	0.24	0.55	$30'$
$37^0 00'$	1 76	0.78	2.27	0.25	0.57	$53^0 00'$
$30'$	1.70	0.75	2.35	0.26	0.59	$30'$
$38^0 00'$	1.64	0.73	2.43	0.27	0.61	$52^0 00'$
$30'$	1.58	0.70	2.52	0.28	0.63	$30'$
$39^0 00'$	1.53	0.68	2,62	0.29	0.66	$51^0 00'$
$30'$	1.47	0.65	2.72	0 30	0 68	$30'$
$40^0 00'$	1.42	0.63	2.82	0.31	0.70	$50^0 00'$
$30'$	1.37	0.61	2.92	0.32	0.73	$30'$
$41^0 00'$	1.32	0.59	3 02	0.34	0.76	$49^0 00'$
$30'$	1.28	0.57	3.12	0 35	0.78	$30'$
$42^0 00'$	1.23	0.55	3.24	0.36	0.81	$48^0 00'$
$30'$	1.19	0.53	3.36	0.37	0.84	$30'$
$43^0 00'$	1 15	0 51	3.48	0.39	0.87	$47^0 00'$
$30'$	1.11	0.49	3.60	0.40	0.90	$30'$
$44^0 00'$	1.07	0.48	3.73	0.41	0.93	$46^0 00'$
$30'$	1.04	0.46	3.86	0.43	0.97	$30'$
$45^0 00'$	1.00	0.44	4.00	0.44	1.00	$45^0 00'$
α	$\mathrm{tg}^2\,\alpha_1$	$^4/_9\,\mathrm{tg}^2\,\alpha_1$	$4\,\mathrm{tg}^2\,\alpha$	$^4/_9\,\mathrm{tg}^2\,\alpha$	$\mathrm{tg}^2\,\alpha$	α_1

2. СФЕРИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ.

При определении взаимного расположения граней и ребер кристаллического комплекса, обыкновенно, употребляются обозначения граней и ребер посредством символов, причем необходимо еще иметь отношение единичных отрезков по кристаллографическим осям и углы между осями.

Кроме такого определения взаимного расположения элементов кристаллического многогранника, возможно еще определение положения граней и ребер по отношению к некоторым направлениям, принятым за основные и занимающим определенное положение в пространстве.

Так как для полного определения кристаллического комплекса, в сущности, необходимо иметь возможность определять только угловые величины, то для таких определений совершенно достаточно иметь два направления в пространстве, принятых за постоянные, по отношению к которым и определяется положение всех граней и ребер комплекса.

За постоянные мы можем принять некоторые направления, имеющие определенное значение в данном кристаллическом комплексе.

За такие направления принимаются:

1) для тетрагоналоидных комплексов:

   a) направление ребра [001],

   b) перпендикуляр к грани (100);

2) для тригоналоидных комплексов:

   a) направление ребра [111],

   b) перпендикуляр к грани $(11\bar{2})$;

3) для гексагоналоидных комплексов:

   a) направление ребра [1000],

   b) перпендикуляр к грани (0121).

Если мы примем только что перечисленные направления за исходные для определения положения всех других направлений, характеризующих данный комплекс, причем положе-

ние каждого направления будем определять угловым расстоянием между исходным направлением и данным, то мы получим для определения каждого направления две угловые величины, которые называются сферическими координатами.

Вообще говоря, сферические координаты мы можем определять различным образом, приняв те или иные условия для нахождения этих координат.

Здесь мы остановимся только на рассмотрении способа получения, так называемых, биполярных сферических координат, что всего удобнее сделать, исследуя стереографические проекции данного кристаллического комплекса.

При получении стереографических проекций граней и ребер данного комплекса, мы можем или расположить заменяющий данный комплекс пучек граней и ребер вполне произвольно, относительно плоскости проекций, или придать граням и ребрам комплекса определенную ориентировку, относительно некоторых точек плоскости проекций, принятых за исходные для отсчета величин угловых отношений.

За такие постоянные точки в плоскости проекций мы принимаем две точки: 1) центр O (рис. 197) основного круга проекций, в котором мы помещаем граммастереографическую проекцию ребра [001] в случае тетрагоналоидного комплекса, ребра [111] в случае тригоналоидного и, наконец, ребра [1000] в случае гексагоналоидного комплекса.

В нижнем полюсе S основного круга проекций, направленном к наблюдателю, мы помещаем гномостереографическую проекцию грани (100) в случае тетрагоналоидного комплекса, $(11\bar{2})$ в случае тригоналоидного, и, наконец, (0121) в случае гексагоналоидного комплекса.

Сделав такую ориентировку стереографических проекций граней и ребер данного кристаллического комплекса, получаем совершенно определенное расположение всех проекций относительно двух точек O и S, принимаемых за исходные для определения угловых величин, характеризующих положение проекции данного ребра или грани комплекса.

Для определения положения проекции данной грани или ребра, производим отсчет углового расстояния такой проек-

ции от точки O. Сделав такой отсчет, получаем некоторый угол ϱ, который определяет тот малый круг с центром в точке O, на котором находится данная гномостереографиче-

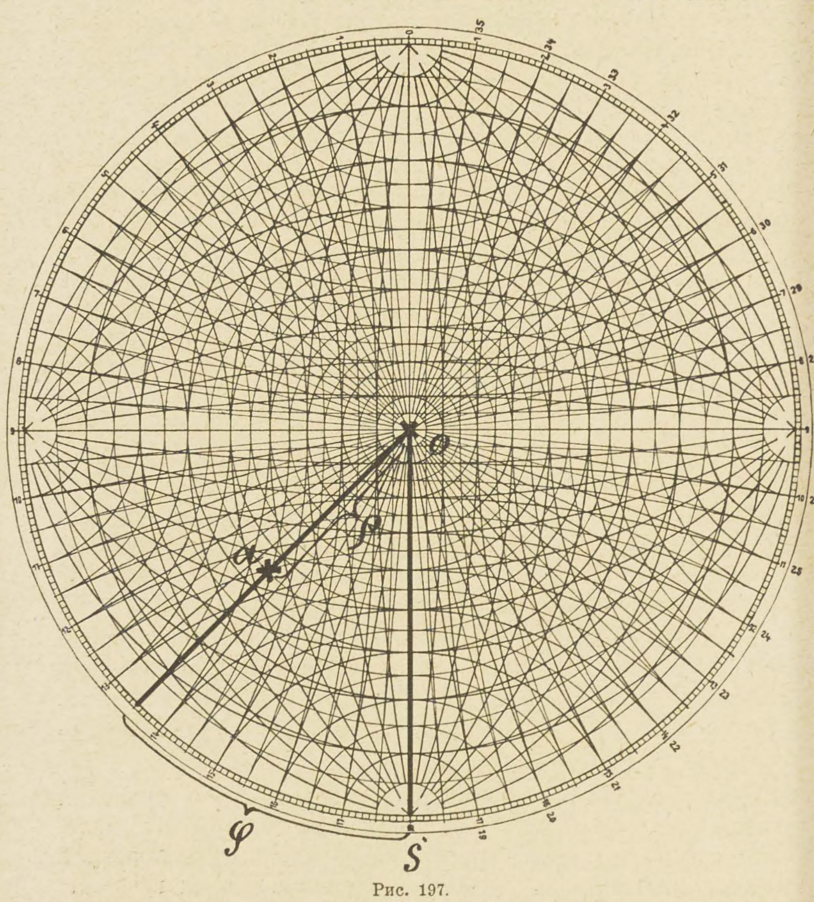


Рис. 197.

ская проекция грани или граммастереографическая проекция данного ребра.

Для точного определения положения данной проекции необходимо кроме угла ϱ еще фиксировать положение того

радиуса основного круга проекций, на котором находится данная точка. Для определения положения этого радиуса мы можем найти угловое расстояние между этим радиусом и тем радиусом, на котором находится точка S, принимая этот последний радиус за исходный для отсчета.

При таком отсчете угловых величин мы поступаем следующим образом.

Прежде всего определяем угловое расстояние от точки S по основному кругу проекций того радиуса этого круга, на котором находится гномостереографическая проекция данного ребра. Этот отсчет обыкновенно производится справа налево по движению часовой стрелки.

Сделав такой отсчет, получаем угол φ.

Вторая, определяющая положение данной проекции, угловая величина — угол ϱ получается непосредственно, если сделать отсчет углового расстояния между центром O и данной проекцией грани или ребра.

Углы φ и ϱ будут сферическими координатами данной грани или ребра, а самая система координат называется биполярной, в виду того, что в этой системе берется две постоянные точки, или два полюса сферы.

Мы можем очень легко установить связь между сферическими координатами данной грани или ребра и их числовыми координатами, т. е. символами.

Перейдем теперь к рассмотрению этой связи, ограничиваясь отношениями, существующими в кубически-изотропном комплексе.

Как мы знаем, кубически-изотропный комплекс, обладающий и четверными и тройными осями симметрии, может быть рассматриваем одновременно как тетрагоналоидный и как тригоналоидный.

Так как перпендикуляр к каждой грани изотропного комплекса будет также и возможным ребром, то оба полюса биполярных координат, в случае изотропного комплекса, будут представлять собою граммастереографические проекции рациональных направлений, т. е. возможных ребер комплекса.

Рассматривая кубически-изотропный комплекс как тетрагоналоидный, можно легко определить отношение между чи-

словыми и сферическими координатами граней и ребер этого комплекса.

В самом деле, положим (рис. 198), oa — некоторое ребро кубически-изотропного комплекса символа $[r_1 r_2 r_3]$ и x_1, x_2, x_3 — кристаллографические оси. Опустив, из произвольно взятой точки a данного ребра, перпендикуляры на оси x_1, x_2, x_3 получаем соответственно:

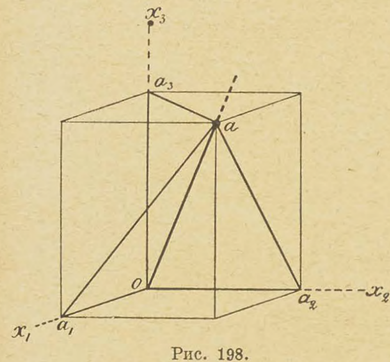


Рис. 198.

$$aa_1,\ aa_2,\ aa_3.$$

Эти перпендикуляры, в виду того, что взятый комплекс изотропный, должны проходить по граням построенного прямоугольного параллелепипеда $oa a_1 a_2 a_3$ и будут представлять собою диагонали этих граней, имеющих вид прямоугольников.

Заметим, что $oa_1 = kr_1$, $oa_2 = kr_2$, $oa_3 = kr_3$, где k — некоторый коэффициент пропорциональности.

Из прямоугольных треугольников aa_1o, aa_2o и aa_3o находим:

$$oa_1 = oa \cdot \cos \angle aoa_1 = oa \cos \alpha_1$$

$$oa_2 = oa \cdot \cos \angle aoa_2 = oa \cos \alpha_2$$

$$oa_3 = oa \cdot \cos \angle aoa_3 = oa \cos \alpha_3$$

Взяв отношения этих равенств и подставив вместо oa_1, oa_2 и oa_3 равные им величины kr_1, kr_2 и kr_3, получаем:

$$r_1 : r_2 : r_3 = \cos \alpha_1 : \cos \alpha_2 : \cos \alpha_3.$$

Таким образом, отношение индексов символа какого угодно ребра кубически-изотропного комплекса равно отношению косинусов углов, образуемых этим ребром с кристаллографическими осями.

Так как символ ребра кубически-изотропного комплекса равен символу грани, перпендикулярной к данному ребру,

то мы можем также сказать, что отношение индексов символа данной грани кубически-изотропного комплекса равно отношению косинусов углов между перпендикуляром к этой грани и кристаллографическими осями.

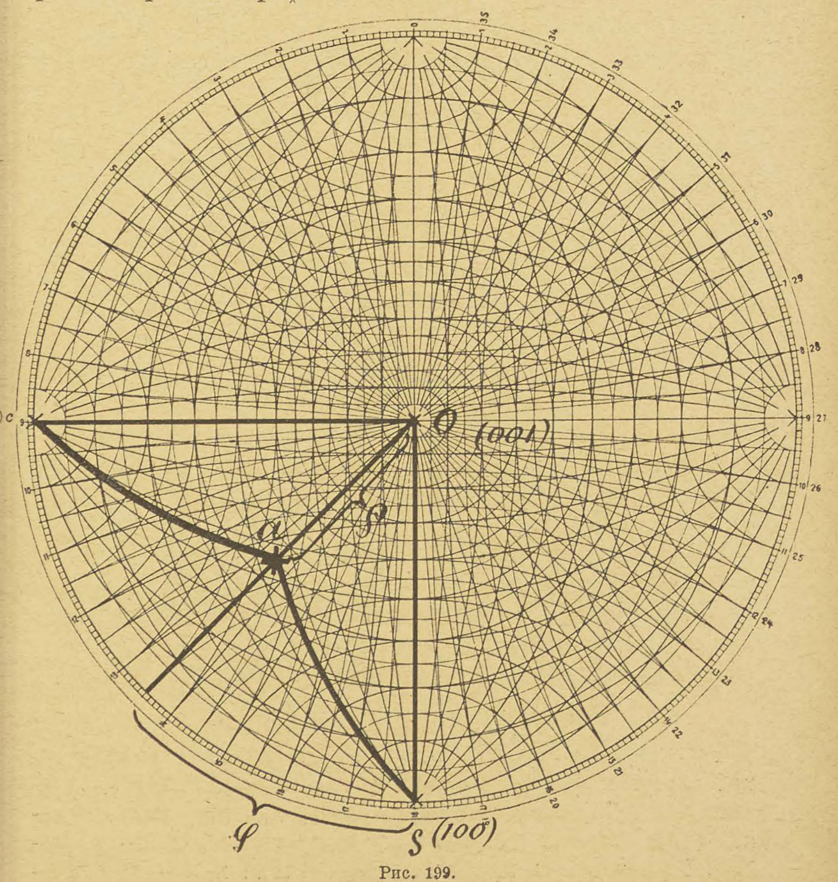


Рис. 199.

Положим (рис. 199), a — граммастереографическая проекция некоторого ребра $[r_1 r_2 r_3]$ кубически-изотропного комплекса.

Если точки o, s и c — гномостереографические проекции граней

(001), (100) и (010), и $\angle as = \alpha_1$, $\angle ac = \alpha_2$ и $\angle ao = \alpha_3$,

то $$r_1 : r_2 : r_3 = \cos \alpha_1 : \cos \alpha_2 : \cos \alpha_3.$$

Из прямоугольного сферического треугольника abs имеем:

$$\cos (as) = \cos (ab) \cos (bs).$$

Так как $bs = \varphi$, а $ab = 90^0 - oa = 90^0 - \varrho$, то из выведенного равенства находим:

$$\cos (as) = \sin \varrho \cdot \cos \varphi.$$

Точно также из прямоугольного сферического треугольника abc получаем:

$$\cos (ac) = \cos (ab) \cos (bc).$$

Так как $bc = 90^0 - bs = 90^0 - \varphi$, а $ab = 90^0 - \varrho$, то

$$\cos (ac) = \sin \varrho \cdot \sin \varphi.$$

Наконец, $$\cos (oa) = \cos \varrho.$$

Таким образом, из этих равенств выводим:

$$r_1 : r_2 : r_3 = \cos \alpha_1 : \cos \alpha_2 : \cos \alpha_3 = \cos \varphi : \sin \varphi : \operatorname{ctg} \varrho.$$

Совершенно аналогичное выражение получится и для определения положения гномостереографической проекции данной грани $(p_1 p_2 p_3)$ кубически-изотропного комплекса, рассматриваемого как тетрагоналоидный, а именно:

$$p_1 : p_2 : p_3 = \cos \varphi : \sin \varphi : \operatorname{ctg} \varrho.$$

Рассматривая кубически-изотропный комплекс как тригоналоидный и приняв ту ориентировку, которая была уже указана для тригоналоидных комплексов, т. е. принимая за полюсы биполярной системы координат (рис. 200) c — гномостереографическую проекцию грани (111) и d — гномостереографическую проекцию грани $(\bar{1}\bar{1}2)$, получаем сферические координаты $\varrho = ca$ и $\varphi = df = \angle dcf$ для определения положения гномостереографической проекции грани a.

Заметим, что $\angle a_1 c a_2 = \angle a_2 c a_3 = \angle a_1 c a_3 = 120^0$ и $ca_1 = ca_2 = ca_3 = 54^0 44' 08''$.

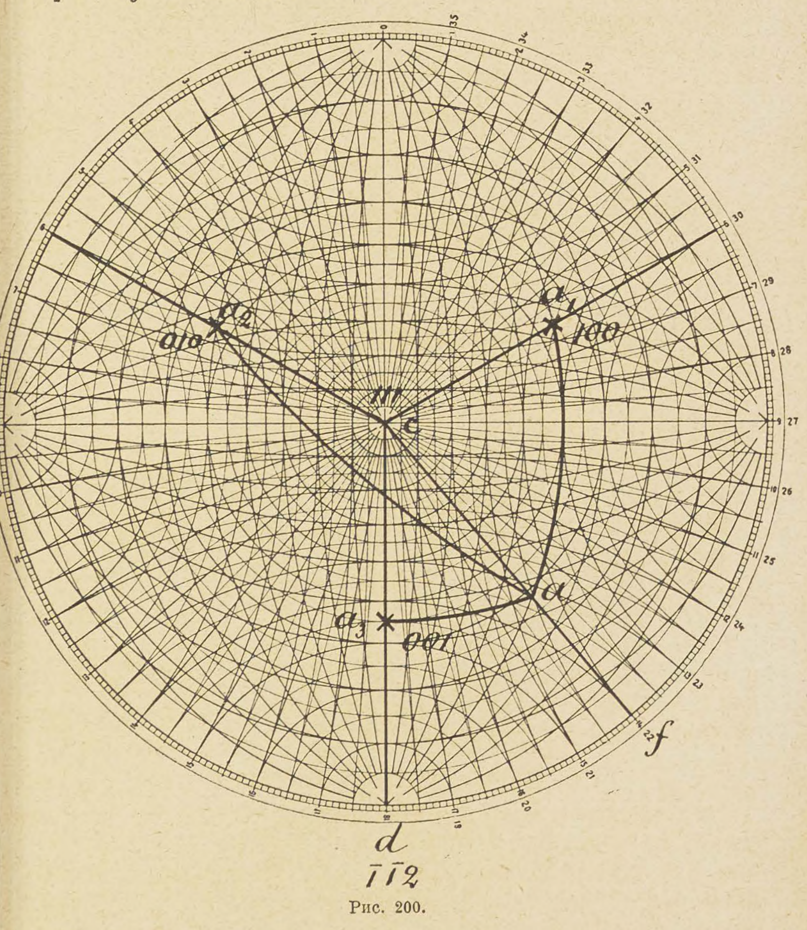


Рис. 200.

Соединив дугами больших кругов точку a с точками a_1, a_2 и a_3, представляющими собою гномостереографические проекции граней (100), (010) и (001), находим из сферических треугольников:

1) $\dot{a}_1 c a$:

$$\cos(a a_1) = \cos\varrho\cdot\cos(c a_1) - \sin\varrho\cdot\sin(c a_1)\cdot\cos(120^0 - \varphi)$$

2) $a_2 c a$:

$$\cos(a a_2) = \cos\varrho\cdot\cos(c a_2) - \sin\varrho\cdot\sin(c a_2)\cdot\cos(120^0 + \varphi)$$

3) $a_3 c a$:

$$\cos(a a_3) = \cos\varrho\cdot\cos(c a_3) - \sin\varrho\cdot\sin(c a_3)\cdot\cos\varphi.$$

Произведя соответственные сокращения, получаем:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{1 - \mathrm{tg}\,\varrho\cdot\sin(30^0 - \varphi)\cdot\sqrt{2}}{1 - \mathrm{tg}\,\varrho\cdot\sin(30^0 + \varphi)\cdot\sqrt{2}}$$

$$\frac{p_2}{p_3} = \frac{1 - \mathrm{tg}\,\varrho\cdot\sin(30^0 + \varphi)\cdot\sqrt{2}}{1 - \mathrm{tg}\,\varrho\cdot\cos\varphi\cdot\sqrt{2}}.$$

3. ВЫЧИСЛЕНИЕ СФЕРИЧЕСКИХ КООРДИНАТ ГРАНЕЙ ПОСЛЕ СДВИГА.

Решение вопроса о вычислении сферических координат граней после сдвига не представляет никакого затруднения и уже отчасти содержится в формуле (§ 1 стр. 122):

$$d_0' = \frac{R\,\mathrm{tg}\,\varrho\cdot\sin(\varphi_0 - \varphi_1)}{\sin\varphi_0}$$

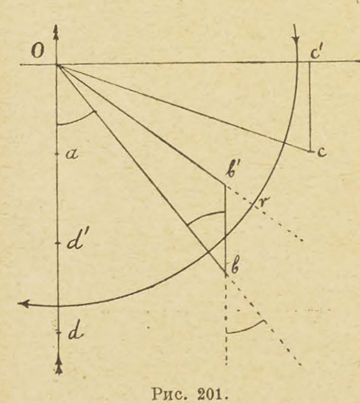


Рис. 201.

В самом деле, пусть (рис. 201) a, b, c, d — гномонические проекции граней какого-нибудь кристаллического комплекса. Точка O — центр и Or — радиус проекции. Примем $Or = 1$. Тогда, по общему свойству гномонических проекций $Oa = \mathrm{tg}\,\varrho_a$, где ϱ_a — сферическая координата ϱ для грани a; соответственно имеем:

$$Ob = \mathrm{tg}\,\varrho_b,$$

$$Oc = \mathrm{tg}\,\varrho_c,$$

$$Od = \mathrm{tg}\,\varrho_d.$$

Если за плоскость сдвига мы примем плоскость чертежа, причем направление и величина сдвига выразятся через Oa (направление сдвига на рис. 201 указано двойной стрелкой), то точка a после сдвига переместится в точку O. На такую же величину и по тому же направлению переместятся в гномонической проекции и все другие грани. Таким образом, если после сдвига b', c', d' — гномонические проекции граней, проектирующихся до сдвига в b, c и d, то $bb' = cc'$ и $dd' = Oa$.

Пусть сферические координаты граней a, b, c, d будут до сдвига соответственно $\varphi_a \varrho_a$, $\varphi_b \varrho_b$, $\varphi_c \varrho_c$, $\varphi_d \varrho_d$, а после сдвига $\varphi_a' \varrho_a'$, $\varphi_b' \varrho_b'$, $\varphi_c' \varrho_c'$, $\varphi_d' \varrho_d'$. Заметим, что в нашем случае $\varphi_a = \varphi_a'$ и $\varphi_d = \varphi_d'$, так как проекции a и d при сдвиге перемещаются в плоскости, перпендикулярной плоскости сдвига и проходящей через центр проекций.

Положим, углы φ отсчитываются по дуге круга, изображенной на фигуре 201, в направлении, указанном стрелкой.

Теперь не трудно вывести общие формулы для всевозможных случаев сдвигов.

Из треугольника Obb' находим:

$$Ob' = \frac{Ob \sin \angle Obb'}{\sin \angle Ob'b}$$

Так как $Ob' = \operatorname{tg} \varrho_b'$; $Ob = \operatorname{tg} \varrho_b$; $\angle Obb' = \varphi_a - \varphi_b$ и $\angle Ob'b = 180^0 - (\varphi_a - \varphi_b')$, то получаем выражение:

$$\operatorname{tg} \varrho_b' = \frac{\operatorname{tg} \varrho_b \cdot \sin (\varphi_a - \varphi_b)}{\sin (\varphi_a - \varphi_b')} \qquad (1)$$

Это выражение тождественно с приведенной выше формулой

$$d_0' = \frac{R \operatorname{tg} \varrho \cdot \sin (\varphi_0 - \varphi_1)}{\sin \varphi_0}.$$

Выражая ту же величину $\operatorname{tg} \varrho_b'$ через $bb' = Oa = \operatorname{tg} \varrho_a$, находим:

$$\operatorname{tg} \varrho_b' = \frac{\operatorname{tg} \varrho_a \cdot \sin (\varphi_a - \varphi_b)}{\sin (\varphi_b - \varphi_b')}. \qquad (2)$$

В формулу (2) входит $\operatorname{tg} \varrho_a$ — постоянный для всех граней.

При вычислении ϱ_d' для грани d, имеющей $\varphi_d = \varphi_a$, формулы (1) и (2) уже не применимы, но специально для этого случая получаем выражение:

$$\operatorname{tg} \varrho_d' = \operatorname{tg} \varrho_d - \operatorname{tg} \varrho_a = \frac{\sin(\varrho_d - \varrho_a)}{\cos \varrho_d \cdot \cos \varrho_a} \qquad (3)$$

Если для грани c имеем $\varphi_a - \varphi_c' = 90^0$, то из прямоугольного треугольника $Oc'c$ выводим для $\operatorname{tg} \varrho_c'$ следующие выражения:

$$\operatorname{tg} \varrho_c' = \operatorname{tg} \varrho_c \cdot \sin(\varphi_a - \varphi_c) = \operatorname{tg} \varrho_c \cdot \cos(\varphi_c - \varphi_c') \qquad (4)$$

и

$$\operatorname{tg} \varrho_c' = \operatorname{tg} \varrho_a \cdot \operatorname{tg}(\varphi_a - \varphi_c) = \operatorname{tg} \varrho_a \cdot \operatorname{ctg}(\varphi_c - \varphi_c') \qquad (5)$$

Если при вычислении сферических координат для грани b после сдвига нам известно также и φ_b', то формулы (1) и (2) могут быть заменены следующими выражениями:

для вычисления φ_b':

$$\operatorname{tg} \varphi_b' = \frac{\operatorname{tg} \varrho_a \cdot \sin(\varphi_a - \varphi_b)}{\operatorname{tg} \varrho_b - \operatorname{tg} \varrho_a \cdot \cos(\varphi_a - \varphi_b)} \qquad (6)$$

для вычисления ϱ_b':

$$\operatorname{tg} \varrho_b' = \sqrt{\operatorname{tg}^2 \varrho_b + \operatorname{tg}^2 \varrho_a - 2 \operatorname{tg} \varrho_b \cdot \operatorname{tg} \varrho_a \cdot \cos(\varphi_a - \varphi_b)} \qquad (7)$$

Вообще, мы видим, что вычисление сферических координат граней после сдвига комплекса сводится к решению плоских треугольников, что, конечно, не может представлять никаких затруднений.

Необходимо еще заметить, что, если грань b (или какаянибудь другая) служит определяющей для какой-нибудь грани q, имеющей координаты $\varrho_q = 90^0$ и φ_q, то $\varphi_q = \varphi_b'$.

Таким образом, наиболее сложные формулы (6) и (7) могут применяться только в исключительных случаях.

Формулы (1) и (2) представляют собою выражения для вычисления сферических координат граней после сдвига для самого общего случая, точно так же, как и формулы (6) и (7). Именно эти формулы и применимы для триклинных комплексов. Наоборот, формулы (3), (4) и (5) имеют специальное значение и применимы только в случае моноклинного комплекса для вычисления сферических координат граней определенного положения после моноклинного сдвига.

4. ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ПРОЕКТИВНОСТИ.

Если мы имеем два кристаллических комплекса, то, рассматривая их с точки зрения теории структуры, мы можем сказать, что у нас имеются две пространственные решетки.

Как мы уже видели выше, между различными пространственными решетками всегда можно установить определенную связь. Такая связь может быть установлена благодаря тому, что из данной пространственной решетки мы можем получить любую другую пространственную решетку, подвергая данную решетку определенным гомогенным деформациям.

Подвергнув одну из двух данных решеток соответствующим деформациям, мы можем получить решетку вполне тождественную со второй данной решеткой, если только предположить, что гомологические точки двух данных решеток будут одинаковыми. После деформации мы можем совместить обе решетки так, чтобы все точки деформированной решетки совпали с точками данной решетки.

Таким образом, мы можем сказать, что каждой точке первой решетки соответствует некоторая точка второй решетке, причем такое соответствие точек двух решеток мы можем установить различно. Необходимо только принять во внимание, что одной из точек первой решетки будет соответствовать та или другая, но только одна точка второй решетки, и наоборот.

Таким образом, между гомологическими точками двух данных пространственных решеток существует всегда однозначное соответствие или однозначная проективность.

Так как положение каждой точки пространственной решетки определяется по отношению к некоторым рядам решетки, принятым за кристаллографические оси, то такое однозначное соответствие между точками двух решеток может быть всегда выражено аналитически при помощи определенного уравнения. Это уравнение может быть только уравнением первой степени.

В самом деле, положим, точке a_1 первой решетки соответствует точка a_2 второй решетки.

Пусть символы точек a_1 и a_2 будут одинаковы, а именно $(t_1 t_2 t_3)$. В таком случае, рассматривая кристаллографические оси, как оси координат, мы видим что координаты точки a_1 будут $t_1 c_1 = x_1$, $t_2 c_2 = x_2$ и $t_3 c_3 = x_3$, где c_1, c_2 и c_3 — длины промежутков по соответствующим рядам, принятым за оси координат в первой данной решетке.

Соответственно, координаты точки a_2 будут:

$$t_1 c_1' = x_1', \quad t_2 c_2' = x_2' \quad \text{и} \quad t_3 c_3' = x_3',$$

где c_1', c_2' и c_3' обозначают длины промежутков рядов по осям координат во второй решетке.

Для того, чтобы установить соответствие между координатами двух точек, каждая из которых входит в состав особой решетки, необходимо каждую из координат x_1, x_2, x_3 первой решетки выразить, в общем случае, через все координаты второй решетки, и наоборот.

При условии однозначности соответствия между точками, мы можем представить выражение каждой координаты первой точки a_1 через три координаты точки a_2 и каждой координаты точки a_2 через все координаты точки a_1 только в виде уравнения первой степени. Действительно, если бы у нас соответствие выразилось уравнением высшей степени, то, решая такое уравнение для выражения координат точки a_1 через координаты точки a_2, или обратно, мы должны бы были получить несколько корней, т. е. несколько возможных значений для каждого неизвестного. Так как за неизвестное мы принимаем определенную координату, то, получив несколько значений для каждой координаты, мы могли бы получить не одну, а несколько точек решетки, определяемых этими координатами, а это обозначало бы, что каждой точке одной из решеток соответствует не одна, а несколько точек другой решетки. В виду того, что такое решение противоречит принятой нами однозначности соответствия, мы и заключаем о возможности выражения такого соответствия только уравнением первой степени.

Такие уравнения, при сделанных нами допущениях, в общем случае, будут иметь следующий вид:

$$x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14},$$
$$x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24},$$
$$x_3' = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34},$$

и обратно

$$x_1 = b_{11}x_1' + b_{12}x_2' + b_{13}x_3' + b_{14},$$
$$x_2 = b_{21}x_1' + b_{22}x_2' + b_{23}x_3' + b_{24},$$
$$x_3 = b_{31}x_1' + b_{32}x_2' + b_{33}x_3' + b_{34},$$

где a и b некоторые коэффициенты.

Если мы совместим гомологическую точку первой решетки, принятую за начало координат, с точкой второй решетки, принятой за начало координат, т. е. вставим одну решетку в другую таким образом, чтобы совместилась друг с другом только одна точка первой и одна точка второй решетки, то при таком совмещении величины a_{14}, a_{24}, a_{34}, b_{14}, b_{24} и b_{34} превратятся в нуль и только что выведенные уравнения примут следующий вид:

$$x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3,$$
$$x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3,$$
$$x_3' = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3,$$

и

$$x_1 = b_{11}x_1' + b_{12}x_2' + b_{13}x_3',$$
$$x_2 = b_{21}x_1' + b_{22}x_2' + b_{23}x_3',$$
$$x_3 = b_{31}x_1' + b_{32}x_2' + b_{33}x_3'.$$

На основании этих уравнений всегда возможно по координатам какой-нибудь точки первой пространственной решетки найти координаты соответствующей ей точки второй решетки, и наоборот.

Для определения соответствия всех точек первой решетки с точками второй решетки необходимо иметь, как данные, соответствия между тремя точками первой и тремя точками второй решетки.

Положим, трем точкам, определяемым координатами: a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_3 и c_1, c_2, c_3 первой решетки соответствуют точки a_1', a_2', a_3'; b_1', b_2', b_3' и c_1', c_2', c_3' второй решетки.

В таком случае, мы получаем:

$$\begin{array}{l|l} a_1' = a_{11}a_1 + a_{12}a_2 + a_{13}a_3 & b_1' = a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + a_{13}b_3 \\ a_2' = a_{21}a_1 + a_{22}a_2 + a_{23}a_3 & b_1' = a_{21}b_1 + a_{22}b_2 + a_{23}b_3 \\ a_3' = a_{31}a_1 + a_{32}a_2 + a_{33}a_3 & b_3' = a_{31}b_1 + a_{32}b_2 + a_{33}b_3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} c_1' = a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + a_{13}c_3 \\ c_1' = a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + a_{23}c_3 \\ c_1' = a_{31}c_1 + a_{32}c_2 + a_{33}c_3 \end{array}$$

Из этих девяти уравнений мы получаем следующие значения искомых коэффициентов:

$$\triangle a_{11} = \begin{vmatrix} a_1' a_2 a_3 \\ b_1' b_2 b_3 \\ c_1' c_2 c_3 \end{vmatrix}; \quad \triangle a_{12} = \begin{vmatrix} a_1 a_1' a_3 \\ b_1 b_1' b_3 \\ c_1 c_1' c_3 \end{vmatrix}; \quad \triangle a_{13} = \begin{vmatrix} a_1 a_2 a_1' \\ b_1 b_2 b_1' \\ c_1 c_2 c_1' \end{vmatrix};$$

$$\triangle a_{21} = \begin{vmatrix} a_2' a_2 a_3 \\ b_2' b_2 b_3 \\ c_2' c_2 c_3 \end{vmatrix}; \quad \triangle a_{22} = \begin{vmatrix} a_1 a_2' a_3 \\ b_1 b_2' b_3 \\ c_1 c_2' c_3 \end{vmatrix}; \quad \triangle a_{23} = \begin{vmatrix} a_1 a_2 a_2' \\ b_1 b_2 b_2' \\ c_1 c_2 c_2' \end{vmatrix};$$

$$\triangle a_{31} = \begin{vmatrix} a_3' a_2 a_3 \\ b_3' b_2 b_3 \\ b_3' c_2 c_3 \end{vmatrix}; \quad \triangle a_{32} = \begin{vmatrix} a_1 a_3' a_3 \\ b_1 b_3' b_3 \\ c_1 c_3' c_3 \end{vmatrix}; \quad \triangle a_{33} = \begin{vmatrix} a_1 a_2 a_3' \\ b_1 b_2 b_3' \\ c_1 c_2 c_3' \end{vmatrix},$$

$$\text{где } \triangle = \begin{vmatrix} a_1 a_2 a_3 \\ b_1 b_2 b_3 \\ c_1 c_2 c_3 \end{vmatrix}.$$

На основании этих выражений мы заключаем, что нахождение девяти коэффициентов всегда возможно, если только $\triangle$ не равно нулю, так как в случае, если $\triangle = 0$, все коэффициенты получают неопределенные значения. Из аналитической геометрии мы знаем, что $\triangle = 0$ только в том случае, когда все три данные точки, определяемые координатами a_1, a_2, a_3; b_1, b_2 ,b_3 и c_1, c_2, c_3 лежат в одной плоскости с началом координат. Таким образом, только в этом специальном случае нахождение значения коэффициентов невозможно, причем во всех других случаях мы получим для этих коэффициентов вполне определенные значения:

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ x_3' &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{aligned}\right\} \quad (I)$$

и

$$\begin{aligned} x_1 &= b_{11}x_1' + b_{12}x_2' + b_{13}x_3' \\ x_2 &= b_{21}x_1' + b_{22}x_2' + b_{23}x_3' \\ x_3 &= b_{31}x_1' + b_{32}x_2' + b_{33}x_3' \end{aligned}$$

где a и b — некоторые коэффициенты.

Подставив в выражениях (I) вместо x_1, x_2, x_3 их значения, находим:

$$\left.\begin{aligned} t_1c_1' &= a_{11}t_1c_1 + a_{12}t_2c_2 + a_{13}t_3c_3 \\ t_2c_2' &= a_{21}t_1c_1 + a_{22}t_2c_2 + a_{23}t_3c_3 \\ t_3c_3' &= a_{31}t_1c_1 + a_{32}t_2c_2 + a_{33}t_3c_3 \end{aligned}\right\} \quad (II)$$

Так как все формулы для вычислений, например, угла между двумя ребрами комплекса и т. д., принимают особенно простой вид в случае кубически-изотропного комплекса, то мы и предположим, что вторая данная решетка будет принадлежать именно кубически-изотропному комплексу гексаэдрической структуры.

В таком случае, приняв $c_1 = c_2 = c_3 = 1$ мы получаем из уравнений (II) следующие выражения:

$$\left.\begin{aligned} t_1c_1' &= a_{11}t_1 + a_{12}t_2 + a_{13}t_3 \\ t_2c_2' &= a_{21}t_1 + a_{22}t_2 + a_{23}t_3 \\ t_3c_3' &= a_{31}t_1 + a_{32}t_2 + a_{33}t_3 \end{aligned}\right\} \quad (III)$$

В этих последних уравнениях, вообще говоря, величины t, как числовые координаты гомологических точек пространственной решетки, хотя и будут непременно целыми числами, но могут иметь общих делителей.

Если же мы возьмем отношение уравнений (III), то получим выражение:

$$\left.\frac{t_1c_1'}{t_2c_2'} = \frac{a_{11}t_1 + a_{12}t_2 + a_{13}t_3}{a_{21}t_1 + a_{22}t_2 + a_{23}t_3} \atop \frac{t_2c_2'}{t_3c_3'} = \frac{a_{21}t_1 + a_{22}t_2 + a_{23}t_3}{a_{31}t_1 + a_{32}t_2 + a_{33}t_3}\right\} \quad (IV)$$

В этом выражении мы можем всегда сократить t на общих делителей.

Положим, общий наибольший делитель трех целых чисел t_1, t_2, t_3 будет d.

Приняв $\frac{t_1}{d} = r_1$; $\frac{t_2}{d} = r_2$; $\frac{t_3}{d} = r_3$; $\frac{t_1 c_1'}{d} = v_1$; $\frac{t_2 c_2'}{d} = v_2$; $\frac{t_3 c_3'}{d} = v_3$, получаем из уравнения (IV):

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= a_{11} r_1 + a_{12} r_2 + a_{13} r_3 \\ v_2 &= a_{21} r_1 + a_{22} r_2 + a_{23} r_3 \\ v_3 & a_{31} r_1 + a_{32} r_2 + a_{33} r_3 \end{aligned}\right\} \quad \text{(V)}$$

В этом уравнении числа v и r уже не будут содержать общих делителей.

В виду этого, мы можем рассматривать уравнение (V), как выражение однозначного соответствия между произведениями из каждого индекса символа ребра некоторого кристаллического комплекса на относительные величины соответственных единичных отрезков по кристаллографическим осям, с одной стороны, и индексами ребра того же символа кубически-изотропного комплекса, с другой.

Величины v_1, v_2 и v_3 называются проективными символами данного ребра $[r_1 r_2 r_3]$, а уравнение (V) называется уравнением проективности.

Так как уравнение проективности устанавливает связь между истинными и проективными символами, то мы можем получить аналогичное (V) уравнение проективности для символов граней, а именно:

$$\left.\begin{aligned} w_1 &= b_{11} p_1 + b_{12} p_2 + b_{13} p_3 \\ w_2 &= b_{21} p_1 + b_{22} p_2 + b_{23} p_3 \\ w_3 & b_{31} p_1 + b_{32} p_2 + b_{33} p_3 \end{aligned}\right\} \quad \text{(VI)}$$

где p — индексы истинного, а w — проективного символа данной грани $(p_1 p_2 p_3)$.

5. УРАВНЕНИЯ ПРОЕКТИВНОСТИ ДЛЯ ТЕТРАГОНАЛОИДНЫХ КОМПЛЕКСОВ.

Как мы видели, уравнения проективности принимают вышеприведенный вид и будут содержать 9 неизвестных $a_{11} \ldots a_{33}$ или $b_{11} \ldots b_{33}$ в том случае, если две решетки совмещены друг с другом только в одной гомологической точке.

Однако, мы можем условиться произвести совмещение некоторых направлений двух данных решеток.

Примем следующее условие для тетрагоналоидных комплексов.

Решетку данного тетрагоналоидного комплекса совмещаем с решеткой кубически-изотропного комплекса так, чтобы совпали ребра [001] и чтобы грани (100) пришли в параллельное положение.

При выполнении такого условия, прежде всего видим, что грань (100) данного тетрагоналоидного комплекса будет иметь проективный символ (100).

В виду этого, составляя уравнение проективности для грани (100), получаем:

$$w_1 : w_2 : w_3 = 1 : 0 : 0 = b_{11} : b_{21} : b_{31},$$

откуда находим: $b_{21} = 0$ и $b_{31} = 0$.

Ребро [001] мы можем рассматривать, как ребро пересечения граней (100) и (010).

Так как грань (100) имеет проективный символ (100), а грань (010) будет иметь проективный символ $(b_{12} b_{22} b_{32})$, то проективный символ ребра [001] будет иметь в качестве индексов миноры детерминанта: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} \end{vmatrix}$, разложенного по первой строке, т. е. 0; $-b_{32}$; b_{22}.

В виду того, что по условию это ребро должно иметь проективный символ [001], мы заключаем, что $b_{32} = 0$.

Приняв это во внимание и разделив правую часть уравнения (VI) на b_{33}, получаем:

$$w_1 : w_2 : w_3 = a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3 : a_4 p_2 + a_5 p_3 : p_3 \qquad \text{(VIII)}$$

где

$$a_1 = \frac{b_{11}}{b_{33}};\ a_2 = \frac{b_{12}}{b_{33}};\ a_3 = \frac{b_{13}}{b_{33}};\ a_4 = \frac{b_{22}}{b_{33}}\ \text{и}\ a_5 = \frac{b_{23}}{b_{33}}.$$

Сделав обратное вычисление, а именно, приняв в уравнении (VIII) за неизвестные p_1, p_2 и p_3, находим:

$$p_1 : p_2 : p_3 = a_4 w_1 + a_2 w_2 + (a_2 a_5 - a_3 a_4)\, w_3 : a_1 w_2 - a_1 a_5 w_3 : a_1 a_4 w_3 \qquad \text{(VIIIa)}$$

Уравнения (VIII) и (VIIIa) служат для вычисления проективных символов граней по их истинным символам, и наоборот.

Для нахождения проективного символа какого-нибудь ребра $[r_1 r_2 r_3]$, мы можем применить следующее рассуждение.

Проведем через данное ребро $[r_1 r_2 r_3]$ и через другие два ребра [001] и [010] две грани.

Истинные символы этих граней будут:

$(r_2 \bar{r}_1 0)$ — для грани, проходящей через ребра $[r_1 r_2 r_3]$ и [001];
$(\bar{r}_3 0 r_1)$ — для грани, проходящей через ребра $[r_1 r_2 r_3]$ и [010].

Проективные символы тех же граней будут:

для грани $(\bar{r}_2 r_1 0)$ — $(a_1 r_2 + a_2 \bar{r}_1;\ a_4 \bar{r}_1;\ 0)$
" " $(\bar{r}_3 0 r_1)$ — $(a_1 r_3 + a_3 r_1;\ a_5 r_1;\ r_1)$

Индексы проективного символа ребра пересечения этих граней будут миноры детерминанта:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 r_2 + a_2 \bar{r}_1 & a_4 \bar{r}_1 & 0 \\ a_1 \bar{r}_3 + a_3 r_1 & a_5 r_1 & r_1 \end{vmatrix},$$

разложенного по первой строке.

Таким образом, мы получаем уравнение проективности для ребер вида:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{a_4 r_1}{-a_2 r_1 + a_1 r_2} , \quad \frac{v_2}{v_3} = \frac{-a_2 r_1 + a_1 r_2}{(a_2 a_5 - a_3 a_4) r_1 - a_1 a_5 r_2 + a_1 a_4 r_3} \quad \text{(IX)}$$

Выведя из этого выражения уравнение для вычисления истинных символов по проективным, т. е. принимая за неизвестные r_1, r_2 и r_3, получаем:

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{a_1 v_1}{a_2 v_1 + a_4 v_2} = \frac{}{a_3 v_1 + a_5 v_2 + v_3} \quad \text{(IX a)}$$

Пользуясь уравнениями проективности (VIII) и (IX), мы можем производить вычисления углов между гранями и ребрами каких угодно тетрагоналоидных комплексов по формулам, выведенным для кубически-изотропного комплекса, если только заменим истинные символы данных граней или ребер их проективными символами.

Как мы видели из выведенных уравнений (VIII) и (IX), для нахождения проективных символов необходимо знать значения коэффициентов $a_1 \ldots a_5$ уравнений проективности.

Эти коэффициенты, вообще говоря — иррациональные числа, причем они называются геометрическими константами данного кристаллического комплекса.

Таких геометрических констант будет пять только для самого общего случая, а именно, для триклинных комплексов.

Для моноклинных комплексов число констант уменьшится до трех.

Для ромбических комплексов мы будем иметь две константы.

Для комплексов тетрагональной и гексагональной сингоний будет всего одна геометрическая константа.

Наконец, для комплексов кубической сингонии мы совершенно не будем иметь ни одной геометрической константы,

или, вернее говоря, все константы будут в этом случае равны или нулю или единице.

Для тетрагоналоидных комплексов моноклинной сингонии, при той же ориентировке, не только проективные символы грани (100) и ребра [001] будут равны истинным, но также будут одинаковы проективные и истинные символы грани (010) и ребра [010].

На основании уравнений (VIII) и (IX) мы имеем:

Проективный символ грани (010) — $(a_2 a_4 0)$

„ „ ребра [010] — $[0, a_1; a_1 a_5]$.

Таким образом, для тетрагоналоидных комплексов моноклинной сингонии мы имеем $a_2 = 0$ и $a_5 = 0$.

В виду этого, уравнения проективности принимают вид:

для граней: $w_1 : w_2 : w_3 = (a_1 p_1 + a_3 p_3) : a_4 p_2 : p_3$

и $p_1 : p_2 : p_3 = (a_4 w_1 - a_3 a_4 w_3) : a_1 w_2 : a_1 a_4 w_3$;

для ребер: $v_1 : v_2 : v_3 = a_4 r_1 : a_1 r_2 : (a_1 a_4 r_3 - a_3 a_4 r_1)$

и $r_1 : r_2 : r_3 = a_1 v_1 : a_4 v_2 : (a_3 v_1 + v_3)$.

Для ромбических тетрагоналоидных комплексов, проективные символы граней (100), (010), (001) и ребер [100], [010], [001] будут равны их истинным символам.

Вычислив проективные символы граней (100), (010) и (001) по уравнению (VIII), получаем:

Проективный символ грани (100) — $(a_1 00)$

„ „ „ (010) — $(a_2 a_4 0)$

„ „ „ (001) — $(a_3 a_5 1)$

Таким образом, находим:

$$a_2 = 0,\ a_3 = 0 \text{ и } a_5 = 0.$$

В виду этого, уравнения проективности принимают вид:

для граней:

$$w_1 : w_2 : w_3 = a_1 p_1 : a_4 p_2 : p_3$$

$$p_1 : p_2 : p_3 = a_4 w_1 : a_1 w_2 : a_1 a_4 w_3$$

и для ребер:

$$v_1 : v_2 : v_3 = a_4 r_1 : a_1 r_2 : a_1 a_4 r_3$$

$$r_1 : r_2 : r_3 = a_1 v_1 : a_4 v_2 : v_3$$

Для комплексов тетрагональной сингонии, при той же ориентировке, мы имеем всего одну геометрическую константу, так как кроме граней (100), (010), (001) и ребер [100], [010] и [001] проективные символы всех граней пояса [001] и ребер пояса (001) будут равны истинным.

В виду этого, мы получаем следующие уравнения проективности:

для граней: $w_1 : w_2 : w_3 = a_1 p_1 : a_1 p_2 : p_3$

$$p_1 : p_2 : p_3 = w_1 : w_2 : a_1 w_3;$$

для ребер: $v_1 : v_2 : v_3 = r_1 : r_2 : a_1 r_3$

$$r_1 : r_2 : r_3 = a_1 v_1 : a_1 v_2 : v_3.$$

6. УРАВНЕНИЯ ПРОЕКТИВНОСТИ ДЛЯ ТРИГОНАЛОИДНЫХ КОМПЛЕКСОВ.

При выводе уравнений проективности для тригоналоидных комплексов, мы совмещаем ребро [111] кубически-изотропного комплекса, рассматриваемого как тригоналоидный, с осью [111] данного комплекса.

Кроме того, приводим грани $(\bar{1}\bar{1}2)$ обоих комплексов в параллельное положение.

При такой ориентировке комплексов находим, что проективный символ ребра [111] будет [111], и проективный символ грани $(\bar{1}\bar{1}2)$ будет также $(\bar{1}\bar{1}2)$.

Составив уравнение проективности для грани $(\bar{1}\bar{1}2)$, получаем:

$$\frac{\bar{1}}{\bar{1}} = \frac{-b_{11} - b_{12} + 2b_{13}}{-b_{21} - b_{22} + 2b_{23}}, \quad \frac{\bar{1}}{2} = \frac{-b_{21} - b_{22} + 2b_{23}}{-b_{31} - b_{32} + 2b_{33}} \qquad \text{(X)}$$

Находим проективные символы для граней $(1\bar{1}0)$, $(10\bar{1})$ и $(01\bar{1})$.

Грань $(1\bar{1}0)$ имеет проективный символ:

$$(b_{11} - b_{12};\ b_{21} - b_{22};\ b_{31} - b_{32}).$$

Грань $(10\bar{1})$ имеет проективный символ:

$$(b_{11} - b_{13};\ b_{21} - b_{23};\ b_{31} - b_{33}).$$

Грань $(01\bar{1})$ имеет проективный символ:

$$(b_{12} - b_{13};\ b_{22} - b_{23};\ b_{32} - b_{33}).$$

Так как эти грани принадлежат к поясу, осью которого будет [111], то для них должно быть справедливо уравнение:

$$v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 = 0, \text{ причем } v_1 = v_2 = v_3 = 1$$

Таким образом, мы имеем:

$$b_{11} - b_{12} + b_{21} - b_{22} + b_{31} - b_{32} = b_{11} - b_{13} + b_{21} - b_{23} + b_{31} - b_{33} = b_{12} - b_{13} + b_{22} - b_{23} + b_{32} - b_{33},$$

откуда получаем:

$$b_{12} + b_{22} + b_{32} = b_{13} + b_{23} + b_{33} = b_{11} + b_{21} + b_{31} \quad \text{(XI)}$$

Из уравнения (X) получаем:

$$2(b_{11} + b_{12} - 2b_{13}) = 2(b_{21} + b_{22} - 2b_{23}) = 2b_{33} - b_{31} - b_{32} \quad \text{(XII)}$$

Принимая, что каждый трехчлен в выражении (XI) равен 1, получаем:

$$b_{11} = 1 - b_{21} - b_{31} \quad (1)$$

$$b_{22} = 1 - b_{12} - b_{32} \quad (2)$$

$$b_{33} = 1 - b_{13} - b_{23} \quad (3)$$

Из выражения (XII), находим:

$$b_{12} = 2b_{13} - b_{11} + b_{21} - b_{22} - 2b_{23}.$$

Подставив в этом последнем равенстве вместо b_{11} и b_{22} их выражения из равенств (1) и (2), получаем:

$$b_{12} = b_{13} + b_{21} - b_{23} + \frac{b_{31} - b_{32}}{2} \quad (4)$$

Подставив в уравнении (2) вместо b_{12} его только что найденное выражение (4), получаем:

$$b_{22} = 1 - (b_{13} + b_{21} + b_{32} - b_{23}) - \frac{b_{31} - b_{32}}{2} \quad (5)$$

Взяв общее уравнение проективности для символа грани:

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{b_{11}p_1 + b_{12}p_2 + b_{13}p_3}{b_{21}p_1 + b_{22}p_2 + b_{23}p_3}$$
$$w_3 \qquad b_{31}p_1 + b_{32}p_2 + b_{33}p_3$$

и подставив в этом уравнении вместо b_{11}, b_{33}, b_{12}, b_{22} их выражение из равенств (1), (3), (4) и (5), получаем:

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{2p_1 - 2(b_{21}+b_{31})p_1 + 2(b_{13}+b_{21}-b_{23})p_2 + (b_{31}-b_{32})p_2 + 2b_{13}p_3}{2b_{21}p_1 + 2p_2 - 2(b_{13}+b_{21}-b_{23})p_2 - (b_{31}+b_{32})p_2 + 2b_{23}p_3} \quad \text{(XIII)}$$
$$w_3 \qquad 2b_{31}p_1 + 2b_{32}p_2 + 2p_3 - 2(b_{13}+b_{23})p_3$$

Это выражение и будет представлять собою общий вид уравнения проективности для граней триклинного тригоналоидного комплекса при принятой нами установке.

Положим:

$$b_{13} = a_1; \quad b_{21} = a_2; \quad b_{23} = a_3; \quad b_{31} = a_4 \quad \text{и} \quad b_{32} = a_5.$$

Из уравнения (XIII) при таких обозначениях находим:

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{2p_1 + 2a_1(p_2+p_3) - 2a_2(p_1-p_2) - 2a_3p_2 + a_4p_2 - a_5p_2}{2p_2 - 2a_1p_2 + 2a_2(p_1-p_2) + 2a_3(p_2+p_3) - a_4p_2 - a_5p_2} \quad \text{(XIV)}$$
$$w_3 \qquad 2p_3 - 2a_1p_3 - 2a_3p_3 + 2a_4p_1 + 2a_5p_2$$

Применив тот же метод, который был принят при вычислении уравнений проективности для ребер тетрагоналоидных комплексов, мы можем получить уравнение проективности и для ребер тригоналоидного комплекса триклинной сингонии.

Однако, в виду сложности уравнений (VIII) и (XIV), мы можем во всех тех случаях, когда у нас имеется не идеальный тригоналоидный комплекс, рассматривать его как тетрагоналоидный и производить вычисления по формулам (VIII) и (IX).

Только в том случае, если нам дан идеальный тригоналоидный комплекс, т. е. комплекс тригональной гипосингонии кубического типа строения, удобнее воспользоваться специальным уравнением проективности, которое мы и выведем.

Заметим, что в тригоналоидном комплексе гексагональной сингонии пояс граней [111] будет изотропным. В виду этого, все грани этого пояса будут иметь проективные символы, равные истинным. Кроме того, как ось [111], так и грань (111) будут иметь одинаковые истинные и проективные символы.

Таким образом, мы можем составить четыре уравнения проективности для граней (111), $(\bar{1}10)$, $(0\bar{1}1)$ и $(10\bar{1})$, зная, что проективные символы этих граней равны истинным.

Эти уравнения будут следующие:

$$1:1:1 = (b_{11}+b_{12}+b_{13}):(b_{21}+b_{22}+b_{23}):(b_{31}+b_{32}+b_{33})$$
$$\bar{1}:1:0 = (-b_{11}+b_{12}):(-b_{21}+b_{22}):(-b_{31}+b_{32})$$
$$0:\bar{1}:1 = (-b_{12}+b_{13}):(-b_{22}+b_{23}):(-b_{32}+b_{33})$$
$$1:0:\bar{1} = (b_{11}-b_{13}):(b_{21}-b_{23}):(b_{31}-b_{33}).$$

Решая эти уравнения, находим:

$$b_{12}=b_{13}=b_{21}=b_{23}=b_{31}=b_{32} \text{ и } b_{11}=b_{22}=b_{33}.$$

Придав первым шести коэффициентам значение 1, а трем последним значение $1+a$, получаем:

$$w_1:w_2:w_3 = (ap_1+p):(ap_2+p):(ap_3+p), \qquad \text{(XV)}$$

где
$$p = p_1+p_2+p_3.$$

Как мы видим, это уравнение проективности имеет только один иррациональный коэффициент.

Проведя через ребра $[r_1r_2r_3]$, [100] и [010] две грани и определив проективный символ ребра их пересечения, получим:

$$v_1:v_2:v_3 = [r-(a+3)\,r_1]:[r-(a+3)\,r_2]:$$
$$:[r-(a+3)\,r_3] \qquad \text{(XVa)}$$

где
$$r = r_1+r_2+r_3.$$

7. ВЫЧИСЛЕНИЕ УГЛОВЫХ ВЕЛИЧИН ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ КОМПЛЕКСОВ.

Пользуясь детерминантами преобразования, мы легко можем производить вычисления всех угловых отношений каких угодно кристаллических комплексов, применяя формулы, выведенные для тетрагоналоидных и тригоналоидных комплексов.

Например, для того, чтобы произвести вычисление угловых отношений в комплексе гексагональной гипосингонии, характеризующемся символами с четырьмя индексами, мы можем принять (1000) за (111), $(010\bar{1})$ за $(\bar{1}10)$, (0011) за $(10\bar{1})$ и (1110) за (120). Сделав такую замену символов указанных граней, мы должны будем произвести изменение всех символов по детерминанту преобразования:

$$\triangle = \begin{vmatrix} 1\bar{1}1 \\ 110 \\ 10\bar{1} \end{vmatrix},$$

причем последний 4-й индекс первоначального символа отбрасыватся, как излишний.

Произведя изменение символов по такому детерминанту, мы можем произвести вычисление всех угловых величин, пользуясь формулами, выведенными для тригоналоидных комплексов гексагональной сингонии.

ОГЛАВЛЕНИЕ.

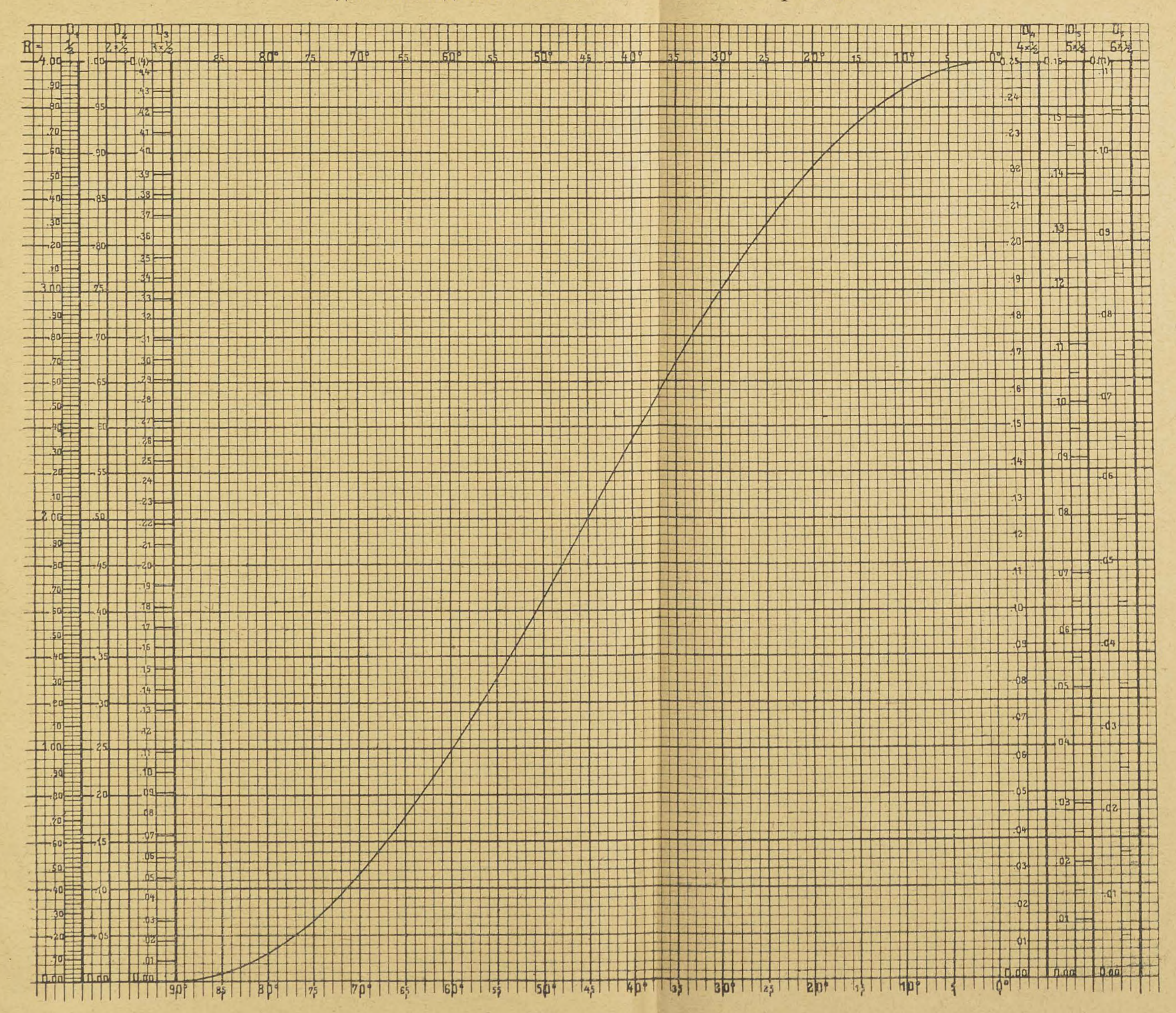
VII. ЗАКОНЫ КРИСТАЛЛИЗАЦИИ.

VIII. ПРАВИЛЬНАЯ УСТАНОВКА КРИСТАЛЛИЧЕСКОГО КОМПЛЕКСА.

IX. КРИСТАЛЛОГРАФИЧЕСКИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ.

ТАБЛИЦА

для нахождения плотностей сеток косых граней.



БИБЛИОТЕКА
СОВРЕМЕННОГО ЗНАНИЯ

Находятся в печати:

ЛИНДОВ. Интегральное исчисление.
ШУМБУРГ. Туберкулез.
РОТ. Основы электротехники.
КРАНЦ. Тригонометрия на плоскости.
ЛЕБ. Биохимия.
МАКСВЕЛ. Материя и движение. С пред. А. Эйнштейна.
ЛОВАЧЕК. Использование водяной энергии.
ВУНДТ. Эллинское мировоззрение.
АРНДТ. Электрохимия.
ФАТЕР. Паровая машина. В двух частях.
ТЕЗИНГ. Экспериментальная биология.
ЗАКС. Строение и жизнь человеческого тела.
ЯКОВЕНКО. Соломон Маймон.
ЛЕМАН. Кинематография.
АСТЕР. Введение в психологию.
ЦУНЦ. Питание человека.
ДОРОШЕНКО. Очерки по истории славянских литератур. В трех частях.
БЕРНШТЕЙН. Видимые и невидимые лучи.
БАВИНК. Введение в органическую химию.
БАВИНК. Введение во всеобщую химию.
БАВИНК. Введение в неорганическую химию.
АНИЧКОВ. Западная литература и славянство.
ТЕЙХМАН. Оплодотворение и наследственность.
ШУМБУРГ. Венерические болезни.
РЮСТ. Искусственное изготовление веществ.
ПЕТЕР. Планеты.
ЯКОВЕНКО. Чаадаев.
КЮММЕЛЬ. Фотохимия.
АНИЧКОВ. История французской литературы.
КРАУЗЕ. Солнце.
КОБРАК. Уход за младенцем.
КАЙЗЕР. Азот и его утилизация.
ШКЛОВСКИЙ. Современная русская проза.
ГАМЕЛЬ. Основные понятия механики.
БИДЕРМАН. Взрывчатые вещества.
ШМИДТ. Число и форма.
ШВАРЦ. Освальд Шпенглер.

ИЗДАТЕЛЬСТВО И. П. ЛАДЫЖНИКОВА
БЕРЛИН W 50